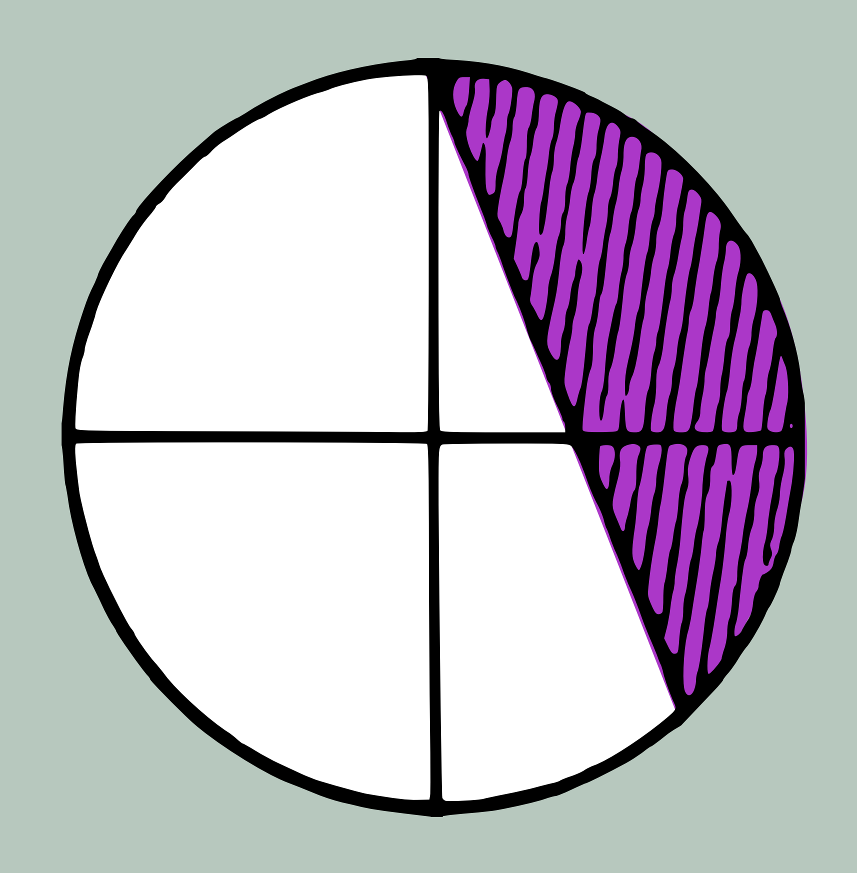
V. Ouvarov

ANALYSE MATHÉMATIQUE



Éditions Mir Moscou

В.Б. УВАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

V. OUVAROV

ANALYSE MATHÉMATIQUE



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par Lioudmila VAKHOURKINA

На французском языке

Imprimé en Union Soviétique

ISBN 5-03-000186-7

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE À L'ÉDITION FRANÇAISE

L'analyse mathématique est née des multiples tentatives de traiter les problèmes d'application les plus divers d'un point de vue unique et ceci avec toute la rigueur possible. Ces tentatives ont abouti : les principaux concepts et les puissantes méthodes de l'analyse mathématique constituent un outil universel qui est utilisé avec succès dans la résolution d'un immense spectre de problèmes. De nombreux grands savants comme Newton, Cauchy, Leibniz y ont apporté leur contribution.

De nos jours, les méthodes mathématiques d'investigation gagnent de nouveaux terrains tels économie, biologie, médecine, linguistique, etc. Cette situation pose de nouveaux problèmes aux auteurs de manuels. Il existe actuellement de nombreux cours d'analyse mathématique. Or, ce sont en général ou bien des cours trop volumineux dont les auteurs essayent d'exposer toutes les questions relevant de cette science, ou bien des cours par trop réduits où bon nombre de questions ou la rigueur, sinon les deux, sont sacrifiés au volume.

Le présent ouvrage a son origine dans le cours oral donné par l'auteur à l'Université Lomonossov de Moscou aux étudiants de différentes spécialités : mathématiciens appliqués, ingénieurs, chimistes, économistes, psychologues, pédagogues, médecins, linguistes et beaucoup d'autres. L'auteur s'est donc fixé pour objectif d'écrire un cours d'analyse mathématique qui soit à la fois rigoureux et complet. Pour arriver à son but, il a revu la démonstration d'un grand nombre de théorèmes, modifié l'ordre traditionnel de l'exposé, réuni certaines sections (exemple : les suites et les séries sont traitées simultanément dans un même chapitre), adopté un ordre unique pour exposer des concepts similaires, etc. Adressant son ouvrage aux techniciens qui auront à l'utiliser dans leur travail quotidien, l'auteur a mis l'accent sur l'application des méthodes d'analyse mathématique au calcul approché. L'exposé est volontairement concis. Des exercices sont donc indispensables pour une meilleure assimilation du matériel. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de nombreux problèmes de caractère théorique et appliqué. La lecture de ce cours n'exige pas de connaissances préliminaires plus amples que pour tout autre cours d'analyse mathématique. L'auteur espère gagner le plus large auditoire.

V. Ouvarov
Moscou, mai 1987

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE DES NOMBRES RÉELS, NOMBRES COMPLEXES, VECTEURS

L'Analyse mathématique est une partie importante des mathématiques supérieures. Les notions et méthodes fondamentales de l'Analyse sont largement utilisées par diverses sciences mathématiques. L'objet d'étude de l'Analyse sont les variables et les fonctions. On entend par variable toute grandeur (observée ou imaginaire) qui est susceptible de prendre diverses valeurs. On entend par fonction une loi qui à chaque valeur d'une variable (ou à un ensemble des valeurs de plusieurs variables) associe une valeur bien déterminée d'une autre variable. Les variables seront, en règle générale, notées par des lettres. Ainsi on note $y = f(x)$ le fait d'associer à chaque valeur d'une variable x, selon une loi notée f, une valeur déterminée de la variable y.

Exemple. Un point matériel se meut le long d'une droite. Si x est le temps que met ce point pour parcourir le chemin y, alors donner sa loi de mouvement c'est donner une fonction $y = f(x)$.

Les fonctions élémentaires sont étudiées en mathématiques élémentaires. Pour une étude approfondie de fonctions on se sert utilement de la notion de passage à la limite. On appelle limite d'une fonction $y = f(x)$ un nombre y_0 vers lequel tend la valeur de la fonction lorsque la variable x tend vers x_0. Une définition plus rigoureuse de la notion de limite et l'application de cette notion à l'étude des variables et des fonctions font précisément l'objet de notre cours. Avant d'aborder la notion de limite, considérons préalablement la notion généralisée de nombre réel.

§ 1. Définition d'un nombre réel. Correspondance entre nombres et points d'une droite

Nous supposons connues les propriétés des nombres rationnels, i.e. des nombres de la forme $\pm m/n$ (m et n sont des entiers positifs). Dans notre cours, nous allons utiliser une généralisation de la notion de nombres, à savoir les nombres réels.

Il existe plusieurs procédés équivalents d'introduire les nombres réels. Nous allons donner cette notion moyennant les fractions décimales illimi-

tées. Tout nombre rationnel m/n se laisse représenter, pour un nombre donné de chiffres décimaux, sous forme d'une fraction décimale avec une erreur ne dépassant pas l'unité de la dernière décimale rejetée, en divisant m par n avec le reste d'après la règle usuelle. En calculant les quotients approchés avec un nombre de plus en plus grand de chiffres décimaux, on arrive à la notion intuitive de fraction décimale illimitée. Ainsi on trouve $1/3 \approx 0{,}33$ à 0,01 près, $1/3 \approx 0{,}333$ à 0,001 près. En poursuivant indéfiniment le processus de précision des approximations décimales, on obtient la représentation suivante : $1/3 = 0{,}33333\ldots$ Si à partir d'un certain pas de précision, les approximations décimales d'un nombre rationnel restent invariables, on posera égales à zéro toutes les décimales qui suivent. Exemple : $6/4 = 1{,}5000\ldots$ A base de ces exemples, considérons la généralisation suivante de la notion de nombre rationnel.

On appelle nombre réel une suite $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ d'entiers précédée d'un signe « + » ou « − », avec $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ pour $i = 1, 2, \ldots$, et a_0 un entier non négatif. Le nombre a_0 se sépare des autres nombres par une virgule. Un nombre précédé d'un signe « + » est dit positif ; précédé d'un signe « − », il est dit négatif. Le signe « + » devant le nombre positif sera parfois omis.

Soit un nombre positif $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ On appelle *approximation par défaut à m décimales du nombre x* le nombre rationnel $x_m = a_0, a_1 a_2 \ldots a_m$ (fraction décimale à m décimales). Le nombre rationnel

$$\bar{x}_m = x_m + 1/10^m$$

s'appelle *approximation par excès à m décimales du nombre x*. Pour les nombres réels négatifs $x = -y$, où $y = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, posons $x_m = -\bar{y}_m$, $\bar{x}_m = -y_m$.

Citons les propriétés évidentes des nombres x_m et $\bar{x}_m$: $x_{m+1} \geqslant x_m$, $\bar{x}_{m+1} \leqslant \bar{x}_m$ et $x_m \leqslant \bar{x}_n$, m, n quelconques. En outre, $x_{m+1} - x_m < 1/10^m$.

Notons également la propriété suivante : *étant donnés les nombres* x_m *à m décimales,* $m = 1, 2, 3, \ldots$, *tels que* $x_{m+1} \geqslant x_m$, $x_{m+1} - x_m < 1/10^m$, *il existe toujours un réel x dont* x_m *constitue l'approximation par défaut à m décimales* (pour $x_m > 0$, les m premières décimales de x et de x_m se confondent).

Illustrons la notion introduite de nombre réel à l'aide de la correspondance entre nombres et points d'une droite. Choisissons sur une droite infinie les points O et E (fig. 1). Mettons en correspondance au point O le nombre 0,000 ..., et au point E le nombre 1,000 ... A chaque point M situé à

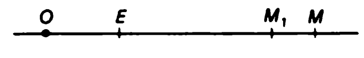


Fig. 1

droite de O associons un nombre réel $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ déterminé comme suit : a_0 est égal au nombre maximal de segments OE contenus dans OM. Si le quotient OM/OE est exact, on pose $a_1 = a_2 = \ldots = 0$. S'il y a le reste M_1M, $M_1M < OE$, a_1 est pris égal au nombre maximal de segments $OE_1 = (1/10)OE$ contenus dans M_1M. En poursuivant ce processus avec des segments $(1/100)OE$, $(1/1000)OE$ et ainsi de suite, on trouve $a_2, a_3, \ldots$ On détermine ainsi n'importe quel chiffre d'une fraction décimale illimitée $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ Si le point M est situé à gauche du point O, on lui associe un nombre négatif $x = -y$, où y correspond au point symétrique de M par rapport à O.

Etablissons maintenant une correspondance réciproque, à savoir associons à chaque nombre réel x un point M de la droite. Il suffit de considérer les nombres positifs, puisque chaque nombre négatif $x = -y$ a son symétrique, par rapport au point O, défini par le nombre y. Soit le nombre $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ Considérons les points M_m et M_m' correspondant aux approximations à m décimales $\underline{x}_m$ et $\overline{x}_m$ de x. On peut obtenir ces points en portant à partir du point O à droite le segment unité OE et ses fractions décimales respectives autant de fois qu'il le faut. On obtient ainsi une suite de segments emboîtés M_0M_0', M_1M_1', ..., M_mM_m', ... La notion de suite de segments emboîtés signifie que chaque point M_{m+1} n'est plus à gauche du point M_m et chaque point M_{m+1}' n'est plus à droite du point M_m', quel que soit $m = 1, 2, \ldots$

Servons-nous de l'axiome de Cantor pour la droite : *dans toute suite de segments emboîtés* $\{M_mM_m'\}$ *il existe au moins un point M appartenant à tout segment* M_mM_m', $m = 1, 2, \ldots$ Cet axiome garantit la continuité de la droite. Montrons que dans le cas considéré il existe un point unique M commun à tous les segments M_mM_m'. En effet, s'il y avait deux tels points, M et M', le segment MM' tout entier serait contenu dans tout segment M_mM_m'. Or la longueur d'un segment M_mM_m' est égale à $1/10^m$, c'est-à-dire peut être rendue inférieure à n'importe quel nombre pour m suffisamment grand. Comme le segment MM' n'est pas plus grand que M_mM_m', nous avons abouti à une contradiction.

Ainsi donc, à chaque nombre $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ correspond un point M et un seul de la droite. Nous avons établi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des nombres réels et celui des points d'une droite. Cette correspondance sera largement utilisée par la suite pour illustrer divers résultats. En particulier, nous dirons parfois point x au lieu de dire nombre réel x.

§ 2. Comparaison des nombres réels

On définit les opérations sur les nombres réels en généralisant l'opération respective sur les fractions décimales. Définissons tout d'abord la relation permettant de comparer deux nombres réels.

Définition. Un réel x est *plus grand* qu'un réel y (notation : $x > y$ ou $y < x$), s'il existe un numéro $m \geqslant 0$ tel que $\underline{x}_m > \bar{y}_m$.

Comme $\underline{x}_0 \leqslant \underline{x}_1 \leqslant \underline{x}_2 \leqslant \ldots$ et $\bar{y}_0 \geqslant \bar{y}_1 \geqslant \bar{y}_2 \geqslant \ldots$, l'inégalité $\underline{x}_m > \bar{y}_m$ aura lieu pour tout $m \geqslant m_0$ si elle est vraie pour $m = m_0$ quelconque. Pour cette raison les inégalités $x > y$ et $y > x$ ne peuvent pas être simultanément vraies. Si elles le pouvaient, il existerait des numéros m_1 et m_2 tels que $\underline{x}_m > \bar{y}_m$ pour $m \geqslant m_1$ et $\underline{y}_m > \bar{x}_m$ pour $m \geqslant m_2$. Alors pour $m \geqslant \max(m_1, m_2)$ on aurait simultanément $\underline{x}_m > \bar{y}_m$ et $\underline{y}_m > \bar{x}_m$, or, ceci est impossible du fait que $\underline{x}_m < \bar{x}_m$ et $\underline{y}_m < \bar{y}_m$.

Définition. Si deux réels x et y ne vérifient aucune des inégalités $x > y$ ou $y > x$, ils sont dits *égaux* (notation : $x = y$).

Si $x = y$, les approximations décimales de ces nombres ne vérifient que l'une des trois relations : $\underline{x}_m = \underline{y}_m$, $\underline{x}_m = \bar{y}_m$, $\underline{y}_m = \bar{x}_m$. Notons que pour $x = y$ les égalités $\underline{x}_m = \bar{y}_m$ ou $\underline{y}_m = \bar{x}_m$ ne peuvent avoir lieu que si l'un des nombres a toutes ses décimales, à partir d'un certain rang, égales à 9, c'est-à-dire pour les nombres de la forme : $x = a_0, a_1 \ldots a_{l-1} a_l\, 00 \ldots$ (pour $a_l > 0$), $y = a_0, a_1 \ldots a_{l-1}(a_l - 1)99 \ldots$ (ici $\underline{x}_m = \bar{y}_m$ pour $m \geqslant l$). Ainsi donc, deux nombres égaux peuvent avoir différentes représentations sous forme de fractions décimales illimitées. Les nombres de la forme $x = \pm a_0, a_1 \ldots a_l\, 000 \ldots$ seront identifiés aux nombres $\pm a_0, a_1 \ldots a_l$ à nombre fini de décimales.

Résumons : deux nombres réels quelconques x et y ne peuvent vérifier que l'une des trois relations s'excluant mutuellement : $x > y$, $y > x$, $x = y$. Nous nous servirons également des inégalités du type $x \leqslant y$ ($x \geqslant y$), disant que soit $x < y$ ($x > y$), soit $x = y$.

Notons la propriété évidente suivante de cette relation (*transitivité*) : si $x > y$ et $y > z$, alors $x > z$. En effet, soit $x > y$ et $y > z$. On peut exhiber alors les numéros m_1 et m_2 tels que $\underline{x}_m > \bar{y}_m$ pour $m \geqslant m_1$ et $\underline{y}_m > \bar{z}_m$ pour $m \geqslant m_2$. Donc pour $m \geqslant \max(m_1, m_2)$ on a simultanément $\underline{x}_m > \bar{y}_m$ et $\underline{y}_m > \bar{z}_m$. Comme $\bar{y}_m > \underline{y}_m$, on en tire immédiatement que $\underline{x}_m > \bar{y}_m > \bar{z}_m$, donc $x > z$. On montre aussi facilement la *transitivité pour l'égalité* : si $x = y$ et $y = z$, alors $x = z$.

Considérons un caractère d'égalité de deux nombres réels très pratique.

Lemme. *Soient deux réels x, y. Supposons que pour $\varepsilon > 0$ quelconque il existe des nombres α et β à nombre de décimales fini tels que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $\beta - \alpha < \varepsilon$. Alors $x = y$.*

□ Supposons que $y > x$. Alors pour un certain m on a $\underline{y}_m > \bar{x}_m$, d'où $\alpha \leqslant x \leqslant \bar{x}_m < \underline{y}_m \leqslant y \leqslant \beta$ et donc $0 < \underline{y}_m - \bar{x}_m < \beta - \alpha$. Pour $\beta - \alpha < \varepsilon < 1/10^m$ cette inégalité n'est possible que lorsque $\underline{y}_m = \bar{x}_m$, ce qui contredit à $\underline{y}_m > \bar{x}_m$. On démontre de même l'impossibilité de l'inégalité $y < x$. ■

Par définition de la comparaison, on a $\underline{x}_m \leqslant x \leqslant \overline{x}_m$. Comme $\overline{x}_m - \underline{x}_m = 1/10^m$, chacun des nombres rationnels $\underline{x}_m$, $\overline{x}_m$ est l'approximation de x au $1/10^m$ près (le premier par défaut, le second, par excès).

§ 3. Bornes d'un ensemble numérique

Avant de passer aux opérations arithmétiques sur les nombres réels, établissons quelques propriétés d'un ensemble arbitraire de nombres réels (ensemble numérique). Introduisons préalablement des définitions et des notations pour un ensemble d'êtres de nature quelconque.

Nous appellerons *ensemble* une collection d'objets réunis en un tout d'après un caractère commun. Les objets faisant partie d'un ensemble en sont les éléments. L'appartenance d'un élément x à un ensemble A est notée comme suit : $x \in A$. Si x n'appartient pas à A, on écrira $x \notin A$ ou $x \bar{\in} A$.

Définition. On dit d'un ensemble A qu'il est *sous-ensemble* d'un ensemble B si tous les éléments de A sont en même temps éléments de B (notation : $A \subset B$).

Définition. Tous les éléments d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent un ensemble B appelé *réunion* des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (notation : $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$).

Introduisons encore une notion utile, celle d'ensemble vide : c'est l'ensemble auquel n'appartient aucun élément. Notation : $\varnothing$. Cette notion simplifie l'écriture de beaucoup de relations. L'ensemble vide est évidemment sous-ensemble de tout ensemble.

Définition. On appelle *intersection d'ensembles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ l'ensemble C des éléments qui appartiennent à tous les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à la fois (notation : $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$).

En écrivant $\bigcap_{i=1}^{2} A_i = \varnothing$, on exprime le fait que les ensembles A_1 et A_2 n'ont pas d'éléments communs.

Citons des exemples d'ensembles numériques le plus fréquemment utilisés :

1) on appelle *intervalle ouvert* et l'on note $]a, b[$ ou $]b, a[$ l'ensemble de tous les nombres x satisfaisant à la relation $a < x < b$;

2) on appelle *intervalle fermé* et l'on note $[a, b]$ ou $[b, a]$ l'ensemble de tous les nombres x satisfaisant à la relation $a \leqslant x \leqslant b$;

3) on appelle *intervalle semi-ouvert* (*semi-fermé*) et l'on note $[a, b[$ ou $]b, a]$ l'ensemble de tous les nombres x satisfaisant à la relation $a \leqslant x < b$. Les notations $]a, b]$ ou $[b, a[$ ont le même sens pour $a < x \leqslant b$.

Définition. Un ensemble numérique A est dit majoré (resp. *minoré*) s'il existe un nombre c tel que pour tout élément $x \in A$ on a l'inégalité $x \leqslant c$ (resp. $x \geqslant c$). Le nombre c s'appelle *majorant* (resp. *minorant*) de l'ensemble A.

Dans cette définition sont en fait réunies deux définitions se rapportant à deux notions opposées (l'une d'elles est mise entre parenthèses). Nous ferons de même dans la suite chaque fois que cela est possible.

Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*. Le plus petit (resp. le plus grand) élément de l'ensemble des majorants (resp. minorants) d'un ensemble A est dit *borne supérieure* (resp. *inférieure*) (notation : $\sup A$ (resp. $\inf A$) qui se lit : supremum de A (resp. infimum de A)). On écrit $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) pour exprimer le fait qu'un ensemble A n'est pas majoré (resp. minoré).

Donnons le critère permettant d'établir que c est effectivement la borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble A : tout $x \in A$ satisfait à l'inégalité $x \leqslant c$ (resp. $x \geqslant c$), en outre, quel que soit $x' < c$ (resp. $x' > c$), il existe un élément $x \in A$ tel que $x > x'$ (resp. $x < x'$). Il découle de ces conditions que c est non seulement un majorant (resp. minorant) de l'ensemble A, mais le plus petit (resp. le plus grand) élément de l'ensemble des majorants (resp. minorants).

Exemple. Supposons que l'ensemble A est composé des nombres 0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; ... Remarquant que tous ces nombres sont plus petits que $1/3 = 0{,}333\ldots$, on en tire que $1/3$ est un majorant de A ; d'autre part, si $x' < 1/3$, alors le nombre $0{,}33\ldots3$ à m décimales appartient à l'ensemble A et est plus grand que x' (par définition même du signe $>$) pour un certain m. Donc $1/3 = \sup A$.

Montrons que tout ensemble numérique possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Théorème. *Tout ensemble numérique non vide majoré* (resp. *minoré*) *admet une borne supérieure* (resp. *inférieure*).

□ Soit A un ensemble majoré, c'est-à-dire qu'il existe un nombre b tel que tout $x \in A$ satisfait à l'inégalité $x \leqslant b$. Pour construire la borne supérieure c de A nous aurons besoin d'approximations à m décimales du nombre c.

L'ensemble A étant non vide, il doit exister un nombre $a \in A$ tel que $a \leqslant b$. Soient les approximations x_m à m décimales des éléments $x \in A$

vérifiant les inégalités $a \leqslant x \leqslant b$. L'ensemble de ces éléments peut être infini, mais l'ensemble des valeurs x_m est fini, puisque l'intervalle $[a, b]$ ne peut contenir qu'une collection finie de nombres à m décimales $((\bar{b}_m - a_m) \cdot 10^m$ au maximum). Soit c_m le plus grand des nombres x_m, $c_m = \max_{x \in A} x_m$. Puisque $x_{m+1} - x_m < 1/10^m$, on a aussi $c_{m+1} - c_m < 1/10^m$. Le nombre c_m est à m décimales, $c_{m+1} \geqslant c_m$ et $c_{m+1} - c_m < 1/10^m$, donc les nombres c_m sont les approximations à m décimales par défaut d'un nombre réel c. Montrons que c est la borne supérieure de l'ensemble A. Commençons par montrer que l'inégalité $x \leqslant c$ a lieu pour tout $x \in A$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour un certain $x \in A$ on a $x > c$. Dans ce cas on aurait $x_m > \bar{c}_m > c_m$ pour un m suffisamment grand, or ceci est impossible en vertu de la définition du nombre c_m. Montrons maintenant que si $x' < c$, il existe un $x \in A$ tel que $x > x'$.

En effet, de $x' < c$ il découle immédiatement $c_m > \bar{x}'_m$ pour un m suffisamment grand. D'où, vu que $\bar{x}'_m \geqslant x'$ et que c_m est l'approximation à m décimales par défaut d'un certain $x \in A$, nous déduisons les inégalités suivantes : $x \geqslant x_m = c_m > \bar{x}'_m \geqslant x'$, donc $x > x'$, ce que nous voulions. Le nombre c vérifie donc les conditions définissant la borne supérieure de l'ensemble A, $c = \sup A$. L'existence de la borne inférieure d'un ensemble numérique minoré non vide se démontre d'une façon parfaitement analogue. ■

Au cours de la démonstration nous avons obtenu les inégalités : $x_m \leqslant (\sup A)_m \leqslant \sup A$, $\bar{x}_m \geqslant \overline{(\inf A)}_m \geqslant \inf A$ pour tout $x \in A$.

Rappelons que nous avons posé $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$ pour un ensemble numérique non majoré (resp. non minoré), on peut donc considérer que tout ensemble numérique admet une borne supérieure (resp. inférieure), finie ou infinie.

Nous allons souvent utiliser dans la suite la propriété élémentaire suivante des notions de supremum et d'infimum d'un ensemble : si A, B sont deux ensembles, $x \in A$, $y \in B$ des éléments quelconques de ces ensembles et $x \leqslant y$, alors on a $\sup A \leqslant \inf B$. En effet, pour un y fixe, on déduit de l'inégalité $x \leqslant y$ que y est un majorant de A et donc $\sup A \leqslant y$. Considérée pour $y \in B$ quelconque, cette inégalité nous donne également $\sup A \leqslant \inf B$.

§ 4. Opérations arithmétiques

Nous allons définir les opérations arithmétiques sur des nombres réels, supposant connues du lecteur les principales propriétés des opérations arithmétiques sur les nombres rationnels.

Soient x, y deux réels donnés et α_1, α_2, β_1, β_2 des réels quelconques à nombre fini de décimales vérifiant les inégalités : $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$,

$\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$ (on peut prendre comme α_1, α_2, β_1, β_2, par exemple, des approximations décimales des nombres x et y).

Définition. On appelle *somme* de deux nombres réels x et y un nombre réel z satisfaisant aux inégalités $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant z \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ (notation : $z = x + y$).

On appelle *produit* de deux nombres réels positifs x, y un nombre réel z satisfaisant aux inégalités $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant z \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2, \alpha_1 \geqslant 0, \beta_1 \geqslant 0$ (notation : $z = x \cdot y$).

Prouvons l'existence des nombres $x + y$ et xy. Donnons-nous des nombres α_2, β_2. Comme $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$, on a $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2$. Montrons que $x + y$ est la borne supérieure de l'ensemble des nombres du type $\alpha_1 + \beta_1$. Cet ensemble étant majoré par le nombre $\alpha_2 + \beta_2$, il possède sa borne supérieure égale à z. Remarquant que $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant z \leqslant \alpha_2 + \beta_2$ et que les différences $(\alpha_2 - \alpha_1)$ et $(\beta_2 - \beta_1)$ peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir les nombres α_1, α_2, β_1 et β_2 de façon à satisfaire à l'inégalité $(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) < \varepsilon$. En vertu du lemme du § 2, le nombre $z = x + y$ est unique. De même, en fixant les nombres α_1 et β_1 et en considérant des α_2 et β_2 arbitraires, on montre que $x + y = \inf (\alpha_2 + \beta_2)$. On démontre d'une façon parfaitement analogue l'existence du nombre $x \cdot y$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ et de l'égalité $x \cdot y = \sup (\alpha_1 \cdot \beta_1) = \inf (\alpha_2 \cdot \beta_2)$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$. Le produit $x \cdot y$ sera noté xy.

Après avoir défini les opérations d'addition et de multiplication tout comme on le fait dans les mathématiques élémentaires, on introduit les opérations inverses, à savoir la soustraction et la division, ainsi que les opérations sur les nombres négatifs. En particulier, on définit comme suit la différence et le quotient de deux nombres réels :

$$x - y = x + (-y) ; \quad x/y = x(1/y),$$

où $-y$ est le nombre y pris avec le signe opposé et $1/y$ le nombre satisfaisant à l'égalité $y(1/y) = 1$. On montre que si $y \neq 0$, le nombre $1/y$ existe. En particulier, $(1/y) = \inf\limits_m (1/y_m)$ pour $y > 0$ (montrez-le à titre d'exercice).

Il découle des définitions et propriétés des opérations arithmétiques et de comparaison sur les nombres rationnels les propriétés suivantes des opérations analogues sur les nombres réels :

1° Si $a > b$ et $b > c$, on a $a > c$; si $a = b$ et $b = c$, on a $a = c$.
2° $a + b = b + a$.
3° $a \cdot b = b \cdot a$.
4° $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5° $a + 0 = a$ $(0 = 0{,}000 \ldots)$.

6° $a \cdot 1 = a \, (1 = 1{,}000 \ldots)$.
7° $a + (-a) = 0$.
8° $a(1/a) = 1$.
9° $(a + b)c = ac + bc$.
10° $(ab)c = a(bc)$.
11° Si $a > b$, alors $a + c > b + c$.
12° Si $a > b$ et $c > 0$, alors $ac > bc$.
13° Quel que soit a réel, on peut toujours, en ajoutant à l'unité autant d'unités qu'il le faut, rendre a inférieur à la somme obtenue (*axiome d'Archimède*).

Nous avons déjà considéré certaines de ces propriétés. Les propriétés 2°, 3°, 5° et 6° découlent immédiatement de la définition des opérations arithmétiques. Penchons-nous sur les propriétés 9° à 13° et 4°.

Soient a, b, c des réels arbitraires et les nombres $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ possèdent un nombre fini de décimales et satisfont aux inégalités suivantes : $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2, \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2, \gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2$.

Etablissons la propriété 4°. On a

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1 \leqslant (a + b) + c \leqslant \leqslant (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2,$$
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1) \leqslant a + (b + c) \leqslant \leqslant \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2) = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir les nombres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ de façon à satisfaire aux inégalités

$$(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) + (\gamma_2 - \gamma_1) < \varepsilon.$$

En vertu du lemme du § 2, on a donc $(a + b) + c = a + (b + c)$.

On établit de même les propriétés 9° et 10°.

Etablissons la propriété 11°. Comme $a > b$, on peut toujours choisir les nombres α_1, β_2 de façon à avoir $a \geqslant \alpha_1 > \beta_2 \geqslant b$. En effet, il découle de l'inégalité $a > b$ qu'il existe un numéro m_0 tel que $a_m > \bar{b}_m$ pour $m \geqslant m_0$. En posant $\alpha_1 = a_m, \beta_2 = \bar{b}_m$, on tire des inégalités $a \geqslant a_m$, $\bar{b}_m \geqslant b$ que $a \geqslant \alpha_1 > \beta_2 \geqslant b$. Choisissons maintenant les nombres γ_1 et γ_2 vérifiant la condition $\gamma_2 - \gamma_1 < \alpha_1 - \beta_2$ que nous pouvons transcrire sous la forme $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$. Comme $a + c \geqslant \alpha_1 + \gamma_1$, $\beta_2 + \gamma_2 \geqslant b + c$, alors en vertu de l'inégalité $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$ nous avons $a + c \geqslant \alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2 \geqslant b + c$, c'est-à-dire que $a + c > b + c$.

La propriété 12° s'établit de même. Quant à la propriété 13°, on peut la formuler comme suit : quel que soit a réel, il existe toujours un entier strictement positif n tel que $n > a$. Pour $a \leqslant 0$ cette propriété est verifiée si

$n = 1$. Si $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$, alors pour vérifier 13° il suffit de poser $n = a_0 + 2$.

On voit donc que les nombres réels possèdent toutes les propriétés principales des nombres rationnels, et donc dans le cas des nombres réels sont valables toutes les règles d'algèbre concernant les opérations arithmétiques, les égalités et les inégalités. En particulier, il n'est pas nécessaire que les nombres α et β du lemme du § 2 soient à nombre fini de décimales.

Dans la suite nous allons nous servir des propriétés suivantes : si $a > b$ et $c > d$, alors $a + c > b + d$ (on peut ajouter les inégalités de même signe). En effet, cette propriété découle des propriétés 1° et 11°, puisque $a + c > b + c$ et $b + c > b + d$. On démontre de même : si $a > b$ et $c > d > 0$, alors $ac > bd$.

Exercice. Soient $x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m$ les approximations à m décimales des nombres x et y. Montrer que

$$x + y = \sup_m (x_m + y_m) = \inf_m (\bar{x}_m + \bar{y}_m)$$

et pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$:

$$xy = \sup_m (x_m y_m) = \inf_m (\bar{x}_m \bar{y}_m).$$

§ 5. Puissances des nombres réels

Définissons pour $a > 0$ et tout x réel l'expression a^x qui jouisse de toutes les propriétés d'une puissance connues de l'algèbre. Si n est un entier strictement positif, alors $a^n = a \cdot a \ldots a$ (produit de n facteurs identiques). Le nombre a^{-n} se définit par l'égalité

$$a^{-n} = 1/a^n.$$

Posons, en outre, $a^0 = 1$. Alors pour toute puissance entière on a les relations :

1. Soit $x_1 < x_2$. Si $a > 1$, alors $a^{x_1} < a^{x_2}$; si $a < 1$, alors $a^{x_1} > a^{x_2}$ ($1^x = 1$).
2. $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $a^{x_1}/a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$.
3. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$, $(a/b)^x = a^x/b^x$.

Rappelons la formule du binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Ici

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad (0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \ldots n)$$

et l'expression du type $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ désigne une somme $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Les quantités C_n^k portent le nom de coefficients binomiaux. On établit la formule du binôme de Newton par récurrence à partir des relations faciles à vérifier suivantes : $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$, $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ (vérifier à titre d'exercice).

Citons les majorations d'une quantité α vérifiant l'inégalité $1 \leqslant (1+\alpha)^n \leqslant a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, pour $a > 1$. Il est évident que $\alpha > 0$ et la formule du binôme de Newton nous donne

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots \geqslant 1 + n\alpha.$$

Comme $a \geqslant (1+\alpha)^n$, on a $\alpha \leqslant (a-1)/n$.

Montrons maintenant que pour tout $a > 0$ et tout $n > 0$, il existe un nombre x tel que $x^n = a$ (notation : $x = a^{1/n}$ ou $x = \sqrt[n]{a}$).

Soient les nombres b_m à m décimales tels que $b_m^n \leqslant a$. On peut montrer que $b_m < a + 1$. Il existe donc le plus grand des nombres b_m ; notons-le x_m. Par construction, $x_{m+1} \geqslant x_m$, $x_{m+1} - x_m < 1/10^m$, de sorte que les nombres x_m peuvent être considérés comme des approximations par défaut à m décimales d'un réel x. Les nombres x et a satisfont aux inégalités suivantes : $x_m^n \leqslant x^n \leqslant \bar{x}_m^n$, $x_m^n \leqslant a \leqslant \bar{x}_m^n$, où $\bar{x}_m = x_m + 1/10^m$. Estimons les différences $\bar{x}_m^n - x_m^n = (x_m + 1/10^m)^n - x_m^n$. On a

$$\bar{x}_m^n - x_m^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{10^m}\right)^k x_m^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{10^m} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} = \frac{(x+1)^n - x^n}{10^m},$$

puisque $x_m^{n-k} \leqslant x^{n-k}$ pour $n - k \geqslant 0$, et

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} - x^n = (x+1)^n - x^n.$$

Si pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire on choisit m à partir de la condition $10^m > [(x+1)^n - x^n]/\varepsilon$, on a l'inégalité $\bar{x}_m^n - x_m^n < \varepsilon$. Le critère d'égalité de deux nombres (voir le lemme du § 2) nous permet d'écrire $x^n = a$, c'est-à-dire il existe un nombre $x = a^{1/n}$.

Définissons maintenant la quantité a^x pour un x rationnel quelconque, posant $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$, $a^{-m/n} = 1/a^{m/n}$ ($m \geqslant 0, n > 0$; m et n sont des

entiers). On peut montrer que les puissances ainsi définies possèdent toutes les propriétés des puissances considérées plus haut.

Soient maintenant $a > 1$, x un réel strictement positif et x_m, $\bar{x}_m$ ses approximations à m décimales. Posons $a^x = \sup_m (a^{x_m})$. Cette dernière notation désigne la borne supérieure de l'ensemble dont les éléments sont les nombres a^{x_m}. Cette borne existe en vertu de l'inégalité $a^{x_m} < a^{\bar{x}_n}$, quels que soient m et n. On tire de cette même inégalité que $a^x = \inf_m (a^{\bar{x}_m})$. En effet,

$$a^{x_m} \leqslant \sup_n (a^{x_n}) \leqslant \inf_n (a^{\bar{x}_n}) \leqslant a^{\bar{x}_m}.$$

Montrons que quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir m de façon à satisfaire à l'inégalité $a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} < \varepsilon$. On a

$$a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} = a^{x_m}(a^{1/10^m} - 1) \leqslant a^x(a^{1/10^m} - 1) = \alpha a^x,$$

où α est racine de l'équation $(1 + \alpha)^{10^m} = a$. Compte tenu des majorations obtenues plus haut, on trouve $0 < \alpha \leqslant (a - 1)/10^m$. Si l'on choisit m à partir de la condition $(a - 1)a^x/10^m < \varepsilon$, on a $a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} < \varepsilon$ et en vertu du lemme du § 2 et des inégalités $a^{x_m} \leqslant \sup_n (a^{x_n}) \leqslant a^{\bar{x}_m}$, $a^{x_m} \leqslant \inf_n (a^{\bar{x}_n}) \leqslant a^{\bar{x}_m}$ on trouve

$$a^x = \sup_n (a^{x_n}) = \inf_n (a^{\bar{x}_n}).$$

Pour $a < 1, x > 0$ on pose $a^x = \dfrac{1}{(1/a)^x}$, et pour $x < 0, a^x = 1/a^{-x}$. On peut montrer qu'ainsi définies, les expressions de la forme a^x possèdent toutes les propriétés des puissances entières.

§ 6. Points limites de l'ensemble numérique

Poursuivons l'étude des ensembles numériques. Introduisons préalablement quelques définitions. On appelle *module* ou valeur absolue d'un nombre x le nombre $|x|$ défini comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ pour } x \geqslant 0, \\ -x \text{ pour } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Notons que les inégalités $|x| < a$ et $-a < x < a$ sont équivalentes. Nous nous servirons dans la suite de la propriété suivante du module :

$$|a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

En effet, $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2$. En extrayant les racines carrées des deux membres de

l'inégalité obtenue, on trouve $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$. On obtient de façon analogue l'inégalité $|a \pm b| \geqslant ||a| - |b||$.

A l'aide de la notion de module on définit la notion très utile de voisinage d'un point donné.

Définition. On appelle *ε-voisinage* d'un point a l'ensemble de nombres réels x satisfaisant à l'inégalité $|x - a| < \varepsilon$ (ou $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$).

Définition. Un point x est appelé *point limite* d'un ensemble A si tout ε-voisinage du point x contient des points $y \in A$ distincts de x.

On montre que tout ε-voisinage d'un point limite contient une infinité d'éléments de l'ensemble A. En effet, supposons qu'un ε-voisinage d'un point x contient un nombre fini d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons le ε_1-voisinage du point x, où $\varepsilon_1 = \min_i |x_i - x|$. Aucun point de l'ensemble A n'appartient à ce voisinage puisque $|x_i - x| \geqslant \varepsilon_1$, par conséquent, le point x ne peut pas être point limite. S'il en est ainsi, c'est-à-dire si le point $x \in A$ n'est pas limite, il existe un voisinage du point x qui ne contient pas de points de l'ensemble A distincts de x. De tels points sont dits parfois points *isolés* de l'ensemble A. Les notions de voisinage et de point limite permettent de dégager les classes spéciales d'ensembles, à savoir les ensembles fermés et ouverts.

Définition. Un point $x \in A$ est appelé *intérieur* à l'ensemble A s'il existe un voisinage de ce point qui soit contenu tout entier dans A. On dit qu'un ensemble est *ouvert* si tous ses points sont intérieurs ; un ensemble est *fermé* s'il contient tous ses points limites.

Les intervalles $]a, b[$ et $[a, b]$ sont des exemples d'ensembles ouvert et fermé respectivement (à vérifier à titre d'exercice).

Voyons sous quelles conditions un ensemble numérique admet un point limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *Tout ensemble numérique A borné et infini admet au moins un point limite.*

□ Etablissons l'existence du point limite le plus à droite par le raisonnement suivant. L'ensemble A étant borné, il existe donc un nombre c tel que pour tous les $x \in A$ on a l'inégalité $|x| \leqslant c$. Sans restreindre la généralité, on peut considérer le nombre c entier, puisque, s'il n'en est pas ainsi, on peut toujours remplacer c, sans violer l'inégalité, par un entier plus grand que c. Considérons des intervalles de la forme $[k, k + 1]$, où k est un entier tel que $-c \leqslant k \leqslant c - 1$. Un au moins de ces intervalles contient un nombre infini d'éléments de l'ensemble A.

Soit $[y_0, \bar{y}_0]$ le plus à droite de ces intervalles. Partageons-le en 10 intervalles égaux. Un au moins de ces intervalles contient un nombre infini

d'éléments de l'ensemble A. Soit $[y_1, \bar{y}_1]$ le plus à droite de ces intervalles. Poursuivant ce processus de division des intervalles en dix parties égales, on obtient des intervalles $[y_m, \bar{y}_m]$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, le nombre d'éléments $x \in A$ vérifiant l'inégalité $x > \bar{y}_m$ ne peut être que fini. L'intervalle $[y_m, \bar{y}_m]$ est de longueur $1/10^m$ et contient un nombre infini d'éléments de A. Les nombres y_m et $\bar{y}_m$ sont par construction à m décimales, en outre $y_{m+1} \geqslant y_m, y_{m+1} - y_m < 1/10^m, \bar{y}_{m+1} \leqslant \bar{y}_m, \bar{y}_m - y_m = 1/10^m$. Pour cette raison, les nombres $\bar{y}_m$ et y_m peuvent être considérés comme des approximations à m décimales respectivement par excès et par défaut d'un réel y. Montrons que y est précisément point limite de l'ensemble A. En effet, considérons un ε-voisinage du point y et choisissons un numéro m à partir de la condition $1/10^m < \varepsilon$. Alors l'intervalle $[y_m, \bar{y}_m]$ est contenu entièrement dans cet ε-voisinage du point y (fig. 2), puisque $y_m \leqslant y \leqslant \bar{y}_m$ et $\bar{y}_m - y_m = 1/10^m$. Par conséquent, le ε-voisinage du point y contient

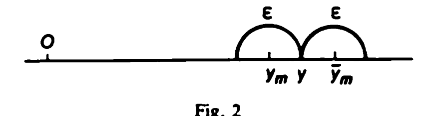


Fig. 2

un nombre infini d'éléments de l'ensemble A, ce qui veut dire que y est point limite de A. D'autre part, à droite du point $\bar{y}_m$ il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A quelque soit m, d'où l'on tire que y est le point limite le plus à droite de A. Nous avons établi l'existence du point limite le plus à droite. On démontre de façon analogue l'existence du point limite le plus à gauche. ■

§ 7. Nombres complexes

Les premières notions sur les nombres complexes sont exposées dans des cours de mathématiques élémentaires. Donnons-en une définition plus rigoureuse.

On peut définir les nombres complexes comme des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels on définit la notion d'égalité et les opérations arithmétiques comme suit :

1) l'égalité $(x, y) = (x_1, y_1)$ a lieu si et seulement si $x = x_1, y = y_1$;

2) $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$,

$$(x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1),$$

$$(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y),$$

$$\frac{(x, y)}{(x_1, y_1)} = \left(\frac{xx_1 + yy_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1y - xy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right).$$

Pour les couples de la forme $(x, 0)$ et uniquement pour eux on introduit l'opération de comparaison : $(x, 0) < (x_1, 0)$ si $x < x_1$.

On a évidemment la correspondance biunivoque $x \sim (x, 0)$ entre les couples $(x, 0)$ et les nombres réels (on montre que la correspondance est préservée par la comparaison et les opérations arithmétiques). Le couple $(x, 0)$ peut donc être identifié à un nombre réel $x : x = (x, 0)$. Par suite, l'ensemble des couples (x, y) contient comme sous-ensemble tous les nombres réels.

On montre que les opérations sur les couples (x, y) possèdent toutes les propriétés des opérations correspondantes sur les nombres réels (outre les propriétés caractérisant l'opération de comparaison des couples (x, y) pour $y \neq 0$).

Nous avons noté plus haut que $x = (x, 0)$. Introduisons la notation $i = (0, 1)$. Le nombre complexe (x, y) peut alors être écrit sous la forme $(x, y) = x + iy$. On peut effectuer sur les nombres $x + iy$ toutes les opérations arithmétiques comme sur les nombres réels, tenant compte du fait que $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ainsi, par exemple

$$\frac{(x, y)}{(x_1, y_1)} = \frac{x + iy}{x_1 + iy_1} = \frac{(x + iy)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} =$$
$$= \frac{xx_1 - i^2yy_1 + i(x_1y - xy_1)}{x_1^2 - i^2y_1^2} = \frac{xx_1 + yy_1}{x_1^2 + y_1^2} +$$
$$+ i\frac{x_1y - xy_1}{x_1^2 + y_1^2} = \left(\frac{xx_1 + yy_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1y - xy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right).$$

Souvent il est plus commode de désigner le nombre complexe $x + iy$ par une seule lettre : $z = x + iy$. Le nombre x s'appelle partie *réelle* et le nombre y, partie *imaginaire* du nombre complexe z (notations : $x = \text{Re}\, z$, $y = \text{Im}\, z$). Le nombre complexe $z = x + iy$ a son *conjugué* $\bar{z} = x - iy$. Il est évident que

$$\text{Re}\, z = (z + \bar{z})/2, \quad \text{Im}\, z = (z - \bar{z})/2i, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

Il est d'usage de représenter les nombres complexes par des points d'un plan. Dans les coordonnées cartésiennes, on porte sur l'axe Ox la partie réelle et sur l'axe Oy la partie imaginaire du nombre complexe z.

Passant dans le plan aux coordonnées polaires ρ, θ, on a $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de l'origine des coordonnées (du point O) au point z, θ est l'angle que font entre eux les rayons Ox et Oz (fig. 3). La quantité $\rho \geqslant 0$ s'appelle *module* du nombre $z = x + iy$, $\rho = |z|$. Il est évident que $|\text{Re}\, z| \leqslant |z|$, $|\text{Im}\, z| \leqslant |z|$, $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$. La quantité θ s'appelle *argument* du nombre z (notation : $\theta = \arg z$). On la définit au terme de la forme $2\pi n$ près (n est un entier). Ainsi, $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Indiquons les propriétés suivantes des nombres ρ et θ dont la vérification est immédiate :

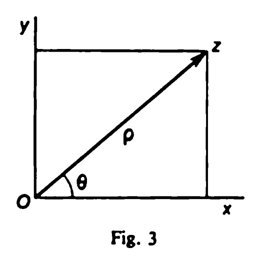


Fig. 3

$z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$;

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,$$
$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \quad (k \text{ entier}).$$

Montrons que le module d'un nombre complexe possède les mêmes propriétés que le module d'un nombre réel. Plus haut, nous avons déjà considéré les égalités

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|.$$

Démontrons l'inégalité

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Prenons comme point de départ l'inégalité évidente $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$. On a

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Comme $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2}$, alors $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$. D'où

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leqslant |z_1 \pm z_2|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)|.$$

Mais $|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leqslant |z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$, d'où $(|z_1| - |z_2|)^2 \leqslant |z_1 \pm z_2|^2 \leqslant$ $\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$. En extrayant les racines carrées, on trouve

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

La notion de module d'un nombre complexe permet de généraliser aux nombres complexes la plupart des définitions et résultats valables pour les nombres réels :

1) un ensemble A de nombres complexes est dit *borné* s'il existe un nombre $c > 0$ tel que pour tous les $z \in A$ on a l'inégalité $|z| \leqslant c$;

2) on appelle ε-voisinage d'un nombre complexe c l'ensemble de nombres complexes z tels que $|z - c| < \varepsilon$.

Avec la notion de ε-voisinage on peut reprendre mot pour mot les défi-

nitions d'un point intérieur et d'un point limite d'un ensemble, celles d'un ensemble ouvert et fermé.

§ 8. Espaces vectoriels

Considérons encore une généralisation de la notion de nombre réel. On appelle *vecteur* ou *point* d'un espace à m dimensions réel (ou complexe) R_m un système ordonné $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ de m nombres réels (ou complexes) si pour ces systèmes sont définies les notions d'égalité et les opérations arithmétiques d'addition et de multiplication par un scalaire d'après les règles suivantes.

Soit $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$. Alors

1) $u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m)$,
   $u - v = (u_1 - v_1, \ldots, u_m - v_m)$;

2) $cu = (cu_1, \ldots, cu_m)$ (c est un scalaire) ;

3) $u = v$ si $u_k = v_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Le nombre u_k s'appelle *composante* k-ième d'un vecteur u.

Notons les propriétés suivantes des opérations introduites :

1° $u + v = v + u$;
2° $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3° $u + v = u + w$ entraîne $v = w$;
4° $cu + cv = c(u + v)$ (c est un scalaire) ;
5° $c_1 u + c_2 u = (c_1 + c_2)u$ (c_1, c_2 sont des scalaires) ;
6° $c_1(c_2 u) = (c_1 \cdot c_2)u$;
7° $1 \cdot u = u$.

On utilise dans la suite la notation suivante : $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

Outre les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire (et des opérations inverses de soustraction et de division par un scalaire) on introduit la notion de produit scalaire pour deux vecteurs quelconques.

Soient $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$; alors le produit scalaire $u \cdot v$ se définit comme suit :

$$u \cdot v \equiv uv = \sum_{k=1}^{m} u_k \cdot \bar{v}_k \text{ (la barre désigne le conjugué complexe).}$$

Notons les propriétés suivantes du produit scalaire :

1° $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$;
2° $(\alpha u + \beta v)w = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$,
   $u(\alpha v + \beta w) = \bar{\alpha}(u \cdot v) + \bar{\beta}(u \cdot w)$ (α et β sont des scalaires) ;
3° $u \cdot u \geqslant 0$ pour tout u, et $u \cdot u = 0$ uniquement pour $u = 0$.

Ces propriétés donnent lieu à l'*inégalité de Cauchy-Bouniakowsky*

$$|u \cdot v| \leqslant \sqrt{(u \cdot u)(v \cdot v)}.$$

□ Prouvons cette inégalité. Si λ est nombre complexe arbitraire, alors $(u + \lambda v)(u + \lambda v) \geqslant 0$, u, v sont des vecteurs. Mais $(u + \lambda v)\cdot(u + \lambda v) = (u + \lambda v)\cdot u + \bar{\lambda}(u + \lambda v)\cdot v = u\cdot u + \lambda(v\cdot u) + \bar{\lambda}(u\cdot v) + |\lambda|^2(v\cdot v)$. Si $(v\cdot v) \neq 0$, alors, posant $\lambda = -(u\cdot v)/(v\cdot v)$, on trouve $u\cdot u - 2\dfrac{|u\cdot v|^2}{v\cdot v} + \dfrac{|u\cdot v|^2}{v\cdot v} \geqslant 0$, i.e. $|u\cdot v|^2 \leqslant (u\cdot u)(v\cdot v)$, relation équivalente à l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky. Si $(v\cdot v) = 0$, alors $v = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky est vraie dans ce cas aussi, puisque $u\cdot v = 0$. ■

Ecrivons l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky sous forme développée :

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k\bar{v}_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \sum_{k=1}^{m} |v_k|^2}.$$

Pour des collections quelconques de nombres réels ou complexes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et $b_1, b_2, \ldots, b_m$ l'égalité de Cauchy-Bouniakowsky s'écrit :

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{m} |b_k|^2}.$$

On la déduit de la précédente en posant $u = (a_1, \ldots, a_m)$, $v = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$, u, v étant des vecteurs.

A l'aide de la notion de produit scalaire on introduit celle de *module* (*norme*) *d'un vecteur* : $|u| = \sqrt{u\cdot u}$. Notons les propriétés importantes suivantes du module d'un vecteur :

1° $|u_k| \leqslant |u|$ (u_k est la composante k-ième du vecteur u) ;

2° $||u| - |v|| \leqslant |u \pm v| \leqslant |u| + |v|$ (i.e. $||u| - |v|| \leqslant |u + v| \leqslant |u| + |v|$ et $||u| - |v|| \leqslant |u - v| \leqslant |u| + |v|$).

Seule la propriété 2° n'est pas évidente. Prouvons-la. Nous aurons besoin des relations

$$|u \pm v|^2 \equiv (u \pm v)(u \pm v) = |u|^2 + |v|^2 \pm [uv + vu] = |u|^2 + |v|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(uv).$$

Comme $|\mathrm{Re}\,(uv)| \leqslant |uv|$, on a $|u|^2 + |v|^2 - 2|uv| \leqslant |u \pm v|^2 \leqslant |u|^2 + |v|^2 + 2|uv|$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky, on a $|uv| \leqslant |u||v|$. Donc $(|u| - |v|)^2 \leqslant |u \pm v|^2 \leqslant (|u| + |v|)^2$ et, par suite, $||u| - |v|| \leqslant |u \pm v| \leqslant |u| + |v|$.

Indiquons la majoration suivante du module d'un vecteur c, produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ par un vecteur b, c'est-à-dire d'un vecteur $c = Ab$ de composantes $c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$|c| \leqslant \|A\| |b|, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}.$$

Le nombre $\|A\|$ s'appelle norme de la matrice A.

La majoration citée se démontre à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky. En effet,

$$|c_i| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_j\right| \leqslant \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2\right]\left[\sum_{j=1}^{m} |b_j|^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 |b|^2}.$$

D'où

$$|c| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |c_i|^2} \leqslant \|A\| |b|.$$

La norme d'une matrice possède les propriétés suivantes :

1° $|\|A\| - \|B\|| \leqslant \|A \pm B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

2° $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

On démontre la première inégalité en considérant un vecteur dont les composantes sont les éléments d'une matrice, l'autre est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky. En effet, soit $C = AB$, c'est-à-dire que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$. On a

$$|c_{ij}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{m} |b_{kj}|^2,$$

d'où

$$\|C\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |b_{kj}|^2\right) = \|A\|^2 \|B\|^2.$$

En extrayant la racine carrée des deux membres de cette inégalité, on trouve $\|C\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

A l'aide de la notion de module d'un vecteur on introduit dans l'espace vectoriel les notions de voisinage, de point intérieur et de point limite d'un ensemble, d'ensembles fermé et ouvert tout comme dans le cas complexe.

Citons quelques exemples d'ensembles ouverts.

1. L'ensemble des points x d'un espace vectoriel tels que $|x - x_0| < \varepsilon$. Un ensemble de cette forme s'appelle ε-voisinage du point x_0. L'inégalité $|x - x_0| < \varepsilon$ se laisse écrire sous la forme de $\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{0,k})^2} < \varepsilon$, où $x_k, x_{0,k}$ sont les composantes des vecteurs x, x_0.

2. L'ensemble des points x tels que

$$|x_k - x_{0,k}| < \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Cet ensemble s'appelle *voisinage rectangulaire* du point x_0.

Considérons aussi quelques exemples d'ensembles fermés.

1. Un ε-voisinage fermé d'un point x_0 défini par l'inégalité $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$.

2. Un voisinage rectangulaire fermé d'un point x_0 défini par les inégalités $|x_k - x_{0,k}| \leqslant \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Soient A un ensemble fermé et B, un ensemble ouvert. Montrons qu'un ensemble C composé d'éléments de A qui ne sont pas en même temps ceux de B est un ensemble fermé. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un point limite x de C ne lui appartenant pas. Mais alors $x \in B$ et il doit exister un voisinage du point x contenu tout entier dans B. Les points de ce voisinage n'appartiennent pas à C, ce qui contredit à l'hypothèse que x est un point limite de l'ensemble C.

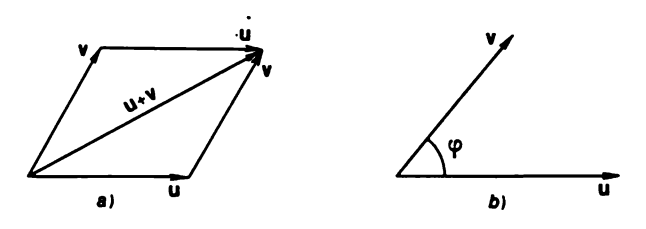
Exercice. Montrer que la réunion d'ensembles ouverts est un ouvert, et que la réunion d'ensembles fermés est un fermé.

§ 9. Interprétation géométrique des vecteurs

En physique, on appelle *vecteur* un segment orienté (notation : $\mathbf{a}$). Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont dits *égaux* s'ils sont superposables moyennant une translation. Les opérations d'addition de deux vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre réel se définissent comme suit.

Pour construire la somme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ il faut transporter le vecteur $\mathbf{v}$ parallèlement à lui-même de façon que son origine coïncide avec l'extrémité de $\mathbf{u}$. Alors le vecteur mené de l'origine de $\mathbf{u}$ vers l'extrémité de $\mathbf{v}$ est précisément le vecteur somme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. On montre que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (fig. 4, *a*).

Le produit d'un vecteur $\mathbf{u}$ par un nombre α est vecteur $\alpha\mathbf{u}$ de mêmes origine et direction, de module $|\alpha|$ fois supérieur ou inférieur suivant que le



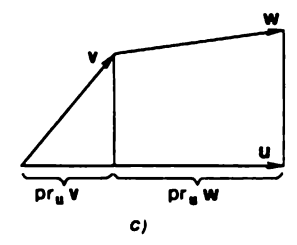


Fig. 4

nombre α est supérieur ou inférieur à l'unité, de même sens que **u** si $\alpha > 0$ et de sens opposé si $\alpha < 0$.

On établit immédiatement que $c\mathbf{u} + c\mathbf{v} = c(\mathbf{u} + \mathbf{v})$; $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u} = (c_1 + c_2)\mathbf{u}$; $c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}$, c, c_1, c_2 sont des nombres réels.

Le produit scalaire de deux vecteurs se définit comme suit :

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi,$$

où $|\mathbf{u}|$ est la longueur du vecteur **u**, φ l'angle que font entre eux les vecteurs **u** et **v**. On a par définition du produit scalaire de vecteurs que $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$ (fig. 4, *b*).

On peut écrire **uv** sous la forme

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\mathbf{u},$$

où $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ est la longueur de la projection du vecteur **v** sur la direction du vecteur **u**, prise avec le signe « + » ou « − » suivant que la projection et le vecteur **u** sont de même sens ou de sens opposés.

La dernière notation du produit scalaire en permet d'établir la propriété suivante : $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}$; $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$ (fig. 4, *c*).

Etablissons maintenant une correspondance entre la définition d'un vecteur que nous venons de donner et celle considérée plus haut. Choisissons trois vecteurs unités orthogonaux **i**, **j**, **k**. On peut représenter tout vecteur **u** sous la forme d'une somme de vecteurs dirigés suivant les vecteurs **i**, **j**, **k** :

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\mathbf{k},$$
$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1)\mathbf{i} + (\alpha u_2)\mathbf{j} + (\alpha u_3)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{uv} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

puisque $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$, $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$.

Ainsi donc, à chaque vecteur $\mathbf{u}$ on peut faire correspondre un triplet de nombres $u = (u_1, u_2, u_3)$, c'est-à-dire le vecteur correspondant à la définition donnée plus haut. Par cette correspondance, au vecteur $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ correspond le vecteur $u + v$, au vecteur $\alpha\mathbf{u}$ le vecteur αu et à $\mathbf{uv}$ le produit scalaire uv introduit plus haut, toutes ces opérations conservant leurs propriétés. Nous avons obtenu un espace vectoriel (réel) à trois dimensions. Par la correspondance en question, la quantité $|u|$ correspond à la longueur du vecteur $\mathbf{u}$.

CHAPITRE 2

SUITES

§ 1. Définitions des suites numériques et des sous-suites. Suites convergentes

Définition. Supposons qu'à chaque entier strictement positif n, $n = 1, 2, \ldots$, est associé un nombre réel x_n. On dit qu'est donnée *une suite numérique* (notation : $\{x_n\}$). Le nombre x_n s'appelle *terme de numéro n* de la suite.

On effectue sur les suites les opérations arithmétiques qu'on définit comme suit.

Définition. On appelle *somme, différence, produit, quotient* de deux suites $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ les suites $\{z_n\}$ dont les termes se forment d'après les lois correspondantes : $z_n = x_n + y_n$, $z_n = x_n - y_n$, $z_n = x_n y_n$, $z_n = x_n/y_n$ (pour $y_n \neq 0$).

Considérons une notion plus générale qu'une somme ou une différence de deux suites, à savoir leur combinaison linéaire. Il s'agit d'une suite $\{z_n\}$ dont les termes sont $z_n = c_1 x_n + c_2 y_n$, où c_1, c_2 sont des nombres donnés.

Définition. Une suite $\{x_n\}$ est dite *bornée supérieurement* ou *majorée* (resp. *bornée inférieurement* ou *minorée*) si l'ensemble numérique d'éléments $x_1, x_2, \ldots$ est majoré (resp. minoré). Une suite majorée et minorée est dite *bornée*.

Parmi les suites, on distingue la classe des suites monotones.

Définition. Une suite $\{x_n\}$ est dite *monotone décroissante* (resp. *monotone croissante*) si pour $m > n$ on a l'inégalité $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$). Si pour $m > n$ on a l'inégalité stricte $x_m < x_n$ (resp. $x_m > x_n$), la suite est dite *strictement décroissante* (resp. *strictement croissante*).

Les suites monotones croissantes et décroissantes ainsi que les suites strictement croissantes et décroissantes sont dites *monotones*.

Définition. Soient une suite $\{x_n\}$ et une suite strictement croissante des entiers positifs $\{k_n\}$. Une suite $\{y_n\} = \{x_{k_n}\}$ est dite *sous-suite* de la suite $\{x_n\}$.

Les plus simples de toutes les suites sont les suites convergentes.

Définition. Une suite $\{x_n\}$ est dite *convergeant* vers un nombre x si quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un numéro N tel que pour tous $n \geqslant N$ a lieu l'inéga-

lité $|x_n - x| < \varepsilon$. Le nombre x s'appelle *limite* de la suite $\{x_n\}$ (notation : $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ ou $x_n \to x$ pour $n \to \infty$).

Les suites non convergentes s'appellent *divergentes.* La notion de limite infinie est parfois utile.

Définition. On dit qu'une suite $\{x_n\}$ a pour limite $+\infty$ si quel que soit $c > 0$ il existe un numéro N tel que pour $n \geqslant N$ on a l'inégalité $x_n > c$ (notation : $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$).

La signification des notations $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ est parfaitement analogue (dans le dernier cas l'inégalité $x_n > c$ pour $n \geqslant N$ est à remplacer par $|x_n| > c$ pour $n \geqslant N$).

Exemple. Montrons que pour $|q| < 1$, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. Posons $|q| = 1/(1 + \alpha)$, où $\alpha > 0$. Comme $|q^n| = 1/(1 + \alpha)^n \leqslant 1/(1 + n\alpha)$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ on a $|q^n| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, où le numéro N est choisi à partir de la condition $1/(1 + N\alpha) < \varepsilon$, c'est-à-dire que $N > > (1/\alpha)(1/\varepsilon - 1)$. Si $q > 1$, on a $\lim_{n \to \infty} q^n = +\infty$, ce qu'on démontre à l'aide des majorations analogues : $q = 1 + \alpha$, où $\alpha > 0$, $q^n = (1 + + \alpha)^n > 1 + n\alpha$, $q^n > c > 0$ pour $n \geqslant N$, N étant choisi tel que $1 + N\alpha > c$.

Si d'une suite $\{x_n\}$ on peut extraire une sous-suite convergeant vers un certain nombre a, ce nombre a s'appelle *limite partielle de la suite* $\{x_n\}$. La plus grande (resp. la plus petite) des limites partielles s'appelle *limite supérieure* (resp. *inférieure*) d'une suite donnée (notation : $\overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$ (resp. $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n$)).

Il s'ensuit de la définition d'une limite que pour des suites convergentes, tous les termes d'une suite $\{x_n\}$ à partir d'un certain numéro n sont contenus dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point x si $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Etudions les conditions d'existence de limites partielles.

Théorème. *Toute suite bornée* $\{x_n\}$ *possède au moins une limite partielle.*

☐ Les nombres x_n, $n = 1, 2, \ldots$, constituent un ensemble numérique borné A (certains éléments de cet ensemble peuvent être associés à plusieurs termes de la suite). L'ensemble A peut être fini (c'est-à-dire contenir un nombre fini d'éléments) ou infini. Dans le premier cas un au moins des éléments de l'ensemble A, disons $x = a$, correspond à un nombre infini de termes de la suite. Supposons que ce soient les termes de numéros k_1, $k_2, \ldots, k_n, \ldots$, où $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ La sous-suite $\{x_{k_n}\}$ est alors convergente, puisque $x_{k_n} = a$ $\left(\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = a\right)$.

Si l'ensemble A est composé d'un nombre infini d'éléments, alors en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass il possède au moins un point limite. Soit $x = a$ un des points limites. Rappelons que tout voisinage d'un point limite contient un nombre infini d'éléments distincts de l'ensemble. Posons $\varepsilon_n = 1/10^n$ et choisissons dans le ε_1-voisinage du point a l'élément de l'ensemble A correspondant au numéro k_1 dans la suite $\{x_n\}$, et dans le ε_2-voisinage du point a, l'élément de A associé au numéro $k_2 > k_1$ de la suite $\{x_n\}$. En poursuivant ce processus, on obtient une sous-suite $\{x_{k_n}\}$ dont les termes vérifient les inégalités $|x_{k_n} - a| < \varepsilon_N$ pour $n \geqslant N$. Cette sous-suite a pour limite le nombre a, puisque, quel que soit $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir N tel que $\varepsilon_N < \varepsilon$ pour satisfaire à l'inégalité $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. ■

Si la suite $\{x_n\}$ n'est pas majorée, on dit que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$. L'expression $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$ a une signification analogue.

On peut donc considérer que toute suite possède une limite partielle, finie ou infinie.

Remarque. Citons la propriété suivante du point limite d'un ensemble composé d'un nombre infini d'éléments qu'on établit avec la méthode utilisée pour la démonstration du théorème : au moyen des éléments de l'ensemble on peut composer une suite de nombres distincts, convergeant vers le point limite de l'ensemble. En effet, soient a un point limite d'un ensemble numérique infini A, x_0 un élément de A autre que a. Le ε_0-voisinage, $\varepsilon_0 = |x_0 - a|/2$, du point a contient au moins un élément, x_1, de l'ensemble A autre que a. Il est évident que $x_1 \neq x_0$, puisque $|x_1 - a| < |x_0 - a|/2$. Le ε_1-voisinage, $\varepsilon_1 = |x_1 - a|/2$, du point a contient également au moins un élément x_2 de l'ensemble A distinct de a. On a évidemment $x_2 \neq x_1$ et $x_2 \neq x_0$. En poursuivant ce processus, on obtient une suite $\{x_n\}$ ayant a pour limite, puisque $|x_n - a| < \varepsilon_0/2^n$.

§ 2. Propriétés des suites convergentes

Les suites convergentes possèdent des propriétés remarquables. Pour les établir nous aurons besoin des propriétés suivantes du module d'un nombre :

1° $|x| < a$ veut dire que $-a < x < a$;

2° $||x_1| - |x_2|| \leqslant |x_1 \pm x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$;

3° $|x_1x_2| = |x_1||x_2|$, $|x_1/x_2| = |x_1|/|x_2|$.

On entendra par suites convergentes des suites ayant une limite finie, sauf mention du contraire.

Théorème. *Les suites convergentes possèdent les propriétés suivantes :*

1° *toute sous-suite d'une suite* $\{x_n\}$ *ayant* x *pour limite, converge également vers* x ;

2° *une suite convergente* $\{x_n\}$ *ne peut avoir qu'une seule limite* ;

3° *soit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$. *Il existe alors un numéro* N *tel que pour* $n \geqslant N$ *tous les termes de la suite* $\{x_n\}$ *sont de même signe que le nombre* a ;

4° *une suite convergente* $\{x_n\}$ *est bornée* ;

5° *supposons que les suites* $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ *ont respectivement pour limite* x *et* y. *Il existe alors les limites*

$$\lim_{n\to\infty} (c_1x_n + c_2y_n) = c_1x + c_2y, \quad c_1, c_2 \text{ sont des nombres donnés,}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_ny_n = xy, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \quad \text{pour} \quad y_n \neq 0, y \neq 0 ;$$

6° *soit* $x_n \leqslant y_n$ *pour* $n \geqslant N_0$ *et les limites* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *existent, alors* $x \leqslant y$;

7° *soit* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *et les limites* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ *existent et sont égales entre elles. Alors la limite de la suite* $\{y_n\}$ *existe et est égale à celles des suites* $\{x_n\}$ *et* $\{z_n\}$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Les deux dernières propriétés sont appelées *théorèmes de comparaison pour les suites.*

☐ 1° Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un numéro N tel que $|x_n - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Considérons une suite partielle $\{x_{k_n}\}$. Comme $k_n \geqslant n$, alors $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$.

2° Soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$, avec $x' \neq x$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des numéros N_1 et N_2 tels que $|x_n - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N_1$ et $|x_n - x'| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$. Si $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$, les deux inégalités ont lieu simultanément. Donc pour $n \geqslant N$ on a

$$|x - x'| = |(x - x_n) + (x_n - x')| \leqslant |x_n - x| + |x_n - x'| < 2\varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, ce dernier résultat n'est possible que lorsque $x = x'$, ce qu'il fallait démontrer.

3° Soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$. Dans ce cas, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un numéro N tel que pour $n \geqslant N$ on a l'inégalité $|x_n - a| < \varepsilon$. Posons $\varepsilon = |a|/2$. Alors, on a $|x_n - a| < |a|/2$ pour $n \geqslant N$. Comme $x_n = a + (x_n - a)$, alors pour $n \geqslant N$ on a $a - |a|/2 < a - |x_n - a| \leqslant x_n \leqslant a + |x_n - a| < a + |a|/2$. Les deux membres de cette inégalité sont de même signe que le nombre a, donc pour $n \geqslant N$ il en est de même pour les nombres x_n.

4° Soit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un numéro N tel que $|x_n - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Donc pour $n \geqslant N$ on a $|x_n| = |(x_n - x) + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < \varepsilon + |x|$, d'où pour tout n on a la majoration

$$|x_n| \leqslant c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, \varepsilon + |x|\}.$$

5° Pour $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ il existe des numéros N_1 et N_2 tels que $|x_n - x| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N_1$, $|y_n - y| < \varepsilon_2$ pour $n \geqslant N_2$. Si $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$, ces deux inégalités sont simultanément vérifiées. D'où pour $n \geqslant N$ on a

$$|(c_1x_n + c_2y_n) - (c_1x + c_2y)| = |c_1(x_n - x) + c_2(y_n - y)| \leqslant$$
$$\leqslant |c_1|\cdot|x_n - x| + |c_2|\cdot|y_n - y| < |c_1|\varepsilon_1 + |c_2|\varepsilon_2.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, choisissons les nombres $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ à partir de la condition $|c_1|\varepsilon_1 + |c_2|\varepsilon_2 = \varepsilon$. Alors pour $n \geqslant N$ on a $|(c_1x_n + c_2y_n) - (c_1x + c_2y)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty}(c_1x_n + c_2y_n) = c_1x + c_2y$. De façon analogue, on a pour $n \geqslant N$

$$|x_ny_n - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|.$$

Etant convergente, la suite $\{x_n\}$ est bornée, c'est-à-dire que $|x_n| < c$, où c est un nombre > 0. Par conséquent, $|x_ny_n - xy| \leqslant c\varepsilon_2 + \varepsilon_1|y|$. Choisissant ε_1 et ε_2 à partir de la condition $c\varepsilon_2 + \varepsilon_1|y| = \varepsilon$, on obtient $|x_ny_n - xy| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, donc $\lim_{n\to\infty} x_ny_n = xy$. Montrons maintenant que $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = x/y$ si $y_n \neq 0$, $y \neq 0$. Pour $n \geqslant N$ on a

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \frac{|x_ny - xy_n|}{|y_n||y|} = \frac{|(x_n - x)y - (y_n - y)x|}{|y_n||y|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|y_n - y|\cdot|x|}{|y_n|\cdot|y|}.$$

Minorons $|y_n|$:

$$|y_n| = |(y_n - y) + y| \geqslant |y| - |y_n - y| > |y| - \varepsilon_2.$$

Choisissons ε_2 tel que $\varepsilon_2 \leqslant |y|/2$. Alors pour $n \geqslant N$ on a $|y_n| > |y|/2$. D'où

$$|x_n/y_n - x/y| < 2\varepsilon_1/|y| + 2\varepsilon_2|x|/|y|^2.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, choisissons les nombres $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ à partir de la condition $2\varepsilon_1/|y| + 2\varepsilon_2|x|/|y|^2 = \varepsilon$. Alors $|x_n/y_n - x/y| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = x/y$.

6° Supposons que $x > y$. Pour $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ arbitraires, il existe un numéro $N \geqslant N_0$ tel qu'on a simultanément $|x_n - x| < \varepsilon_1$, $|y_n - y| < \varepsilon_2$ pour $n \geqslant N$ (cf. n° 5). Evaluons la différence $x_n - y_n$ pour $n \geqslant N$. Nous avons $x_n - y_n = (x_n - x) - (y_n - y) + x - y > x - y - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Si $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ sont choisis à partir de la condition $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < x - y$, alors pour $n \geqslant N$ on aurait l'inégalité $x_n - y_n > 0$, ou $x_n > y_n$, ce qui contredit l'hypothèse.

7° Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe un numéro N tel que $|x_n - x| < \varepsilon$, $|z_n - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, où $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. Mais $x_n - x \leqslant y_n - x \leqslant z_n - x$. Comme $x_n - x > -\varepsilon$, $z_n - x < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, alors $-\varepsilon < y_n - x < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que $|y_n - x| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$; par conséquent, $\lim_{n\to\infty} y_n = x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. ■

Signalons que la relation $\lim_{n\to\infty} (c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x + c_2 y$ se généralise facilement par récurrence au cas d'un nombre plus grand de termes.

Corollaire de la propriété 6°. *Supposons que pour $n \geqslant N_0$ on a l'inégalité $x_n \leqslant a$ et la limite $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existe, alors $x \leqslant a$.*

Pour prouver ce corollaire, il suffit de poser $y_n = a$ dans l'énoncé de la propriété 6°.

On montre de façon analogue que si pour $n \geqslant N_0$ on a l'inégalité $x_n \geqslant a$ et la limite $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ existe, on a $x \geqslant a$.

Signalons que dans l'énoncé de la propriété 6° on peut remplacer l'inégalité $x_n \leqslant y_n$ par l'inégalité stricte $x_n < y_n$, car de cette dernière égalité découle la première. Même remarque concernant le corollaire de 6°.

Corollaire de la propriété 2°. *Si dans l'énoncé de la propriété 2° on pose $y_n = y = 0$, $c_1 = c$, alors pour $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ on a $\lim_{n\to\infty} cx_n = cx$.*

On déduit du corollaire de la propriété 6° une propriété, fort utile pour les applications, des limites supérieure et inférieure d'une suite : *si* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$ (resp. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$), *alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre au plus fini de termes de la suite plus grands que* $a + \varepsilon$ (resp. *plus petits que* $a - \varepsilon$).

En effet, soit pour fixer les idées $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$ et $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe un nombre infini de termes plus grands que $a + \varepsilon$. Composons une nouvelle suite de tels termes de la suite initiale. En vertu du corollaire de la propriété 6°, toute limite partielle de cette nouvelle suite est au moins égale à $a + \varepsilon$. Mais cette limite partielle est également limite partielle de la suite

initiale. Ainsi donc, on exhibe une limite partielle de la suite plus grande que sa limite supérieure ; or, ceci est impossible. On démontre par des raisonnements analogues l'assertion concernant la limite inférieure de la suite.

Etudions quelques critères de convergence des suites. Connaissant la limite d'une suite, on peut, la définition d'une limite à l'appui, vérifier si la suite en question est convergente. Il existe pourtant un critère de convergence qui ne fait pas intervenir la limite de la suite. Ce critère s'appelle *critère de Cauchy.*

Théorème (critère de Cauchy). *Pour la convergence d'une suite* $\{x_n\}$ *il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un numéro* N *tel que pour* $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ *a lieu l'inégalité* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

☐ *Nécessité.* Supposons que la suite $\{x_n\}$ converge vers un certain nombre x. Alors, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un numéro N tel que $|x_n - x| < \varepsilon_1$ si $n \geqslant N$. Mais dans le cas considéré on a pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leqslant |x_n - x| + |x_m - x| < 2\varepsilon_1.$$

Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, posons $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$; alors pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ on a $|x_n - x_m| < \varepsilon$, c'est-à-dire que sont vérifiées les conditions du critère de Cauchy.

Suffisance. Supposons que, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un numéro N tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon_1$ si $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Dans ce cas, fixant un $m \geqslant N$, on a

$$|x_n| = |(x_n - x_m) + x_m| \leqslant |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon_1 + |x_m|$$

si $n \geqslant N$. Par conséquent, la suite $\{x_n\}$ est bornée et possède au moins une limite partielle x. Montrons que cette limite partielle est limite de toute la suite $\{x_n\}$. Par définition de x, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe un numéro $N_0 \geqslant N$ tel que $|x_{N_0} - x| < \varepsilon_1$. Mais dans ce cas pour $n \geqslant N_0 \geqslant N$ on a

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{N_0}) + (x_{N_0} - x)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - x_{N_0}| + |x_{N_0} - x| < 2\varepsilon_1.$$

En posant, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, on obtient pour $n \geqslant N_0$ que $|x_n - x| < \varepsilon$, c'est-à-dire la suite $\{x_n\}$ converge vers le nombre x. ■

Une suite pour laquelle sont remplies les conditions du critère de Cauchy est dite *fondamentale,* ou de Cauchy.

Le critère de convergence dont nous venons de parler est un critère général. Pour les suites monotones il existe un critère de convergence plus simple.

Théorème. *Une suite croissante* (resp. *décroissante*) *majorée* (resp. *minorée*) *est convergente.*

☐ Soit $\{x_n\}$ une suite croissante majorée. Alors l'ensemble des nombres x_n, $n = 1, 2, \ldots$ est majoré et donc possède la borne supérieure x. Montrons que la suite $\{x_n\}$ converge vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des nombres x_n contient au moins un nombre x_N, qui soit plus grand que $x - \varepsilon$. Mais dans ce cas on a $x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que $-\varepsilon < x_n - x \leqslant 0$, d'où $|x_n - x| < \varepsilon$ et, par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Le cas d'une suite décroissante minorée se démontre de façon analogue. ■

Considérons quelques limites remarquables.

1. Prouvons l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$. Considérons une suite $\{x_n\}$, où $x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Comme $x_n > 1$, la suite $\{x_n\}$ est minorée. D'autre part,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{1 + 1/n}{1 + 1/(n-1)}\right)^n (1 + 1/n) = (1 - 1/n^2)^n (1 + 1/n) <$$
$$< (1 - 1/n^2)^n (1 + 1/n^2)^n = (1 - 1/n^4)^n < 1,$$

c'est-à-dire que $x_n < x_{n-1}$.

Ainsi, la suite $\{x_n\}$ est décroissante et minorée et donc convergente vers un certain nombre, noté e (e $\approx$ 2, 71828). Ensuite

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 1/n)^{n+1}}{1 + 1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)} = \mathrm{e}.$$

2. Prouvons que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ pour $a > 0$. Pour $a > 1$, posons $a^{1/n} = 1 + \alpha_n$. Alors $(1 + \alpha_n)^n = a$, de sorte que $0 < \alpha_n \leqslant (a - 1)/n$ (on a utilisé pour α_n l'estimation obtenue plus haut). Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. Si $a < 1$, il suffit d'utiliser l'égalité $a^{1/n} = 1/(1/a)^{1/n}$.

Exemples. **1.** Soit $x_n = (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0)/(b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b_0)$ et $a_k \neq 0, b_p \neq 0$. Cherchons $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (k et p sont des entiers positifs).

Divisons le numérateur et le dénominateur par $x_n = n^{k-p} y_n$, la puissance supérieure de n, où $y_n = \dfrac{a_k + a_{k-1}/n + \ldots + a_0/n^k}{b_p + b_{p-1}/n + \ldots + b_0/n^p}$. Comme $1/n^s \to 0$ pour tout $s > 0$ lorsque $n \to \infty$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} y_k = a_k/b_p$. Etant donné que n^{k-p} croît indéfiniment pour $k > p$, que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-p} = 1$ pour $k = p$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-p} = 0$ pour $k < p$, on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } a_k/b_p > 0,\ k > p, \\ -\infty & \text{pour } a_k/b_p < 0,\ k > p, \\ a_k/b_p & \text{pour } k = p, \\ 0 & \text{pour } k < p. \end{cases}$$

2. Soit $x_n = a^{1/n} \sin(\pi n/3)$, $a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Cherchons les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble numérique A à éléments x_n ainsi que les limites partielles de la suite $\{x_n\}$.

De la suite $\{x_n\}$ extrayons les suites partielles monotones, en posant $n = 6k - p$, $x_n = y_{k,p}$ pour $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

En vertu du théorème précédent, les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble numérique B_p dont les éléments sont des termes d'une suite monotone $\{y_{k,p}\}$, sont encadrées par les nombres $y_{1,p}$ et $\lim_{k\to\infty} y_{k,p}$. En outre, $A = \bigcup_{p=0}^{5} B_p$. Ainsi donc $\sup A = \max_p [\sup B_p]$, $\inf A = \min_p [\inf B_p]$. D'où

$$\sup A = \max_p \left[\lim_{k\to\infty} y_{k,p}\,;\, y_{1,p}\right], \quad \inf A = \min_p \left[\lim_{k\to\infty} y_{k,p}\,;\, y_{1,p}\right].$$

Ici $\lim_{k\to\infty} y_{k,p} = -\sin(\pi p/3)$, puisque $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, $y_{1,p} = -a^{1/(6-p)} \sin(\pi p/3)$. En outre, les limites partielles de la suite initiale sont égales à $\lim_{k\to\infty} y_{k,p}$ puisque les suites $\{y_{k,p}\}$ en sont des suites partielles.

§ 3. Séries numériques

Introduisons la notion de *série numérique*. Les séries numériques qui sont aussi largement utilisées dans diverses branches des mathématiques que les suites, sont des généralisations des sommes de nombres réels

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

au cas d'un nombre infini de termes $\left(\text{notation : } \sum_{k=0}^{\infty} x_k\right)$.

Définition. On appelle *somme partielle* de numéro n d'une série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Définition. Une série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est dite *convergente* si la suite $\{S_n\}$ de ses sommes partielles est convergente. La limite S de la suite des sommes partielles s'appelle *somme de la série* $\left(\text{notation : } S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\right)$

Nous avons donc lié la convergence d'une série à celle de la suite de ses sommes partielles. On peut établir une dépendance réciproque : une suite $\{x_n\}$ est convergente ou divergente selon que la série $x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ est convergente ou divergente. En effet, cette assertion s'établit sur le vu des sommes partielles de la série :

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1}.$$

Les critères de convergence des suites étudiés plus haut nous permettent d'établir des critères de convergence des séries numériques.

Critère de Cauchy. *Pour qu'une série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *soit convergente il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un numéro* N *tel que pour* $n > m \geqslant N$ *on a l'inégalité* $\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon$.

Pour prouver cette assertion, servons-nous du critère de Cauchy de convergence des suites de sommes partielles $\{S_n\}$ et de l'égalité $\sum_{k=m+1}^{n} x_k = S_n - S_m$. Le critère de Cauchy donne pour $m + 1 = n$ un critère simple et nécessaire de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$: si la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est convergente, alors $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ (la réciproque n'est pas vraie).

Voyons maintenant quelles sont les conditions suffisantes assurant la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. De l'inégalité $\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |x_k|$ il découle pour $n > m$ que la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ entraîne celle

de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ est convergente, la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est dite *absolument convergente*. Si par contre la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est convergente, mais la série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ diverge, la première série est dite *simplement convergente*, ou *semi-convergente*.

Théorème. *On a les critères suivants de convergence et de divergence de la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$:

1° *soit* $\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leqslant c$ *pour tous les* n, *où* c *est une constante. Alors la* série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est absolument convergente* ;

2° **critère de comparaison.** *Soit* $|x_k| \leqslant y_k$ *pour* $k \geqslant N_0$ *et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ est convergente, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est absolument convergente* ; *si pour* $k \geqslant N_0$ *on a* $x_k \geqslant |y_k|$ *et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ *est divergente, alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est également divergente* ;

3° **critère de Cauchy.** *Soit* $\alpha = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|x_k|}$. *Alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est absolument convergente pour* $\alpha < 1$ *et divergente pour* $\alpha > 1$;

4° **critère de D'Alembert.** *Soit* $\beta = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|$ (*pour* $x_k \neq 0$). *Alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est absolument convergente pour* $\beta < 1$. *Si pour* $k \geqslant N_0$ *on a l'inégalité* $\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \geqslant 1$, *la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est divergente.*

□ 1° Soit $\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leqslant c$ pour tout n. Les sommes $\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k|$ forment une suite croissante bornée supérieurement. La suite $\{\bar{S}_n\}$ est donc convergente et la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, absolument convergente.

2° Soit $|x_k| \leqslant y_k$ pour $k \geqslant N_0$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$, convergente. Les conditions du critère de Cauchy étant remplies pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$, elles le sont également pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ en vertu des inégalités $\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} y_k$, $n > m$. La seconde proposition se démontre par l'absurde (provez-la à titre d'exercice).

3° Servons-nous du critère de comparaison. Comparons la série initiale avec la progression géométrique illimitée $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$, où $y_k = aq^k$, $a > 0$. Montrons que cette série est convergente pour $0 \leqslant q < 1$ et divergente pour $q > 1$. On a $\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. On voit que la suite des sommes partielles $\bar{S}_n$ tend pour $0 \leqslant q < 1$ vers le nombre $a/(1 - q)$. Si $q > 1$, la limite $\lim_{k \to \infty} y_k = \lim_{k \to \infty} aq^k = +\infty$; or, pour la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ il faut que $\lim_{k \to \infty} y_k = 0$: la série est donc divergente.

Supposons maintenant que les termes de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ vérifient la condition $\alpha = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$. En vertu des propriétés de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un numéro N tel que $\sqrt[k]{|x_k|} < \alpha + \varepsilon$ pour $k \geqslant N$ (l'inégalité $\sqrt[k]{|x_k|} \geqslant \alpha + \varepsilon$ n'a lieu que pour un nombre fini de numéros, voir § 2). Comme $\alpha < 1$, on peut choisir ε assez petit pour avoir $\alpha + \varepsilon = q < 1$. On a alors $\sqrt[k]{|x_k|} < q$ pour $k \geqslant N$, donc $|x_k| < y_k$, où

$y_k = q^k$. Comme la série $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ est convergente, la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison. Soit maintenant $\alpha > 1$. Par définition de la limite supérieure, un nombre infini des termes de la suite $\{\sqrt[k]{|x_k|}\}$ vérifie l'inégalité $\alpha - \varepsilon \leqslant \sqrt[k]{|x_k|} \leqslant \alpha$ pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire que $(\alpha - \varepsilon)^k \leqslant |x_k| \leqslant \alpha^k$. Choisissons maintenant un $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir $\alpha - \varepsilon = q > 1$. Alors un nombre infini des termes de la suite $\{x_k\}$ vérifie l'inégalité $|x_k| \geqslant q^k > 1$ et le critère nécessaire de convergence de séries, à savoir $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, ne peut pas être satisfait. La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est donc divergente.

4° Soit $\beta = \overline{\lim_{k\to\infty}} |x_{k+1}/x_k| < 1$. Des propriétés de la limite supérieure découle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un numéro N tel que $|x_{k+1}/x_k| < \beta + \varepsilon$ pour $k \geqslant N$.

Choisissons un ε assez petit pour avoir $\beta + \varepsilon = q < 1$. Alors $|x_{k+1}/x_k| < q$ pour $k \geqslant N$, c'est-à-dire que $|x_{N+1}| < |x_N| q$, $|x_{N+2}| < |x_{N+1}| q < |x_N| q^2, \ldots, |x_k| \leqslant |x_N| q^{k-N}$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} |x_N| q^{k-N}$ est convergente, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ en vertu du critère de comparaison. Soit maintenant $|x_{k+1}/x_k| \geqslant 1$ pour $k \geqslant N_0$. Les termes de la suite $\{|x_k|\}$, $k \geqslant N_0$, ne décroissent alors pas et le critère nécessaire de convergence des séries $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ n'a pas lieu. La série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est donc divergente. ■

Le critère de convergence de Cauchy ou celui de D'Alembert s'utilisent surtout lorsque les limites $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|}$ ou $\lim_{k\to\infty} |x_{k+1}/x_k|$ existent, car dans ce cas la limite supérieure se confond avec la limite usuelle.

Considérons le critère suffisant de convergence des séries applicable également dans le cas des séries semi-convergentes.

Règle de Leibniz. *Soit* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *une série alternée, c'est-à-dire que* $x_k = (-1)^k a_k$, *où* $a_k \geqslant 0$. *Alors, si pour* $k \geqslant 2N_0$ *la suite* $\{a_k\}$ *est monotone décroissante et* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, *la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est convergente.*

□ Pour $n \geqslant N_0$ on a $S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geqslant 0$. Ensuite, $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, puisque la suite $\{a_k\}$ est monotone décroissante. En outre, $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \leqslant 0$. Comme $S_{2n+1} \geqslant$ $\geqslant S_{2n-1}$ et $S_{2n+1} \leqslant S_{2n} \leqslant S_{2n-2} \leqslant \ldots \leqslant S_{2N_0}$, la suite $\{S_{2n+1}\}$ des sommes impaires est monotone croissante et bornée supérieurement, ce qui veut dire qu'existe la limite $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S = \sup_n S_{2n+1}$.

De façon analogue, il découle des inégalités $S_{2n+2} \leqslant S_{2n}$, $S_{2n} \geqslant$ $\geqslant S_{2n+1} \geqslant S_{2N_0+1}$ que la suite $\{S_{2n}\}$ est monotone décroissante et bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'existe la limite $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \bar{S} = \inf_n S_{2n}$. Passant dans l'égalité $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1}$ à la limite, on trouve $S = \bar{S}$, c'est-à-dire qu'existe la limite $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Comme $S = \inf_n S_{2n} =$ $= \sup_n S_{2n+1}$, alors $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ pour $n \geqslant N_0$, i.e. les sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1} donnent une limite à $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ près. ■

Exercices. **1.** Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est absolument convergente si telle est la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $b_k \neq 0$, et existe la limite $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)$.

Indication. Utiliser le fait que la suite $\{a_k/b_k\}$ est bornée.

2. Soit $a_{k,p} = 1/[(k+1)(k+2)\ldots(k+p)]$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,p}$ pour $p > 1$ à l'aide de la relation

$$a_{k,p}(1-p) = a_{k+1,p-1} - a_{k,p-1}.$$

3. En utilisant les résultats des exemples 1 et 2, prouver la convergence des séries de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} (P_m(k)/Q_n(k))$, où $P_m(k)$, $Q_n(k)$ sont des polynômes de degré m et n respectivement, $Q_n(k) \neq 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ et $n - m > 1$.

4. Soit $a_k - b_k = c_k$ et supposons que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ est convergente. Montrer que la convergence (ou la divergence) de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ découle de celle de la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

5. Montrer qu'une suite monotone est convergente si telle est une sous-suite qui en est extraite.

Indication. Utiliser le fait qu'une sous-suite convergente est bornée.

§ 4. Opérations sur les séries

Considérons quelques propriétés des séries, analogues à celles des sommes finies.

Théorème de Cauchy de la permutabilité des termes d'une série convergente. *Si une série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est absolument convergente, alors toute série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k'$ *obtenue par permutation de ses termes est aussi absolument convergente et a la même somme.*

□ Soient S_n et S_n' des sommes partielles des séries $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k'$. Comme la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est absolument convergente, il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un numéro N_0 tel que $\sum_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$ pour $p > m \geqslant N_0$. D'où

$$|S_p - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{p} x_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$$

pour $p > m \geqslant N_0$. En passant dans cette inégalité à la limite lorsque $p \to \infty$, on trouve que $|S - S_m| \leqslant \varepsilon_1$ pour $m \geqslant N_0$, où S est la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Tous les termes de la somme S_m sont contenus dans une somme S_N', pour cette raison la somme S_n' contient pour $n \geqslant N = N(\varepsilon_1)$ tous les termes de la somme S_m et en plus quelques termes de la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ avec $k > m$. Soit p le plus grand de ces numéros. La différence $S_n' - S_m$ représente alors la somme des termes x_k tels que $m < k \leqslant p$. Le module d'une somme ne dépassant pas la somme des modules des termes, on a

$|S_n' - S_m| \leqslant \sum_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N(\varepsilon_1)$, d'où

$$|S_n' - S| = |(S_n' - S_m) + (S_m - S)| \leqslant$$
$$\leqslant |S_n' - S_m| + |S_m - S| < 2\varepsilon_1$$

pour $n \geqslant N$. Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, posons $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Alors $|S_n' - S| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. On a donc montré que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ est convergente et sa somme est égale à S. Des raisonnements analogues appliqués aux séries $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ et $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k'|$ nous convainquent que la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k'$ est absolument convergente. ■

Montrons que dans une série semi-convergente la permutation de termes peut entraîner un changement de la somme de la série.

Exemple. Soit la série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$. D'après la règle de Leibniz, c'est une série convergente. Changeons l'ordre de sommation, en associant les termes de la série en groupes composés chacun d'un terme positif et de deux négatifs :

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

Pour la série considérée on a

$$S_{3n-1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{1}{k+1},$$

par conséquent, $\lim_{n\to\infty} S_{3n-1} = S/2$, où $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$. Comme $\lim_{n\to\infty} (S_{3n+1} - S_{3n}) = \lim_{n\to\infty} (S_{3n} - S_{3n-1}) = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{3n-1} = S/2$. Ainsi donc, par une permutation de termes de la série initiale, nous avons obtenu une autre série dont la somme est deux fois moindre. Le théorème que nous venons de démontrer interdit la convergence

absolue de la série initiale, donc la série $\sum_{k=0}^{\infty}\left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ est divergente. Cette série s'appelle *harmonique*.

Citons sans démonstration le théorème suivant.

Théorème de Riemann. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *est semi-convergente et* S *est un nombre arbitraire, on peut obtenir par permutation de termes une série convergeant vers* S.

Traitons la question d'addition et de multiplication terme à terme des séries convergentes.

Théorème. *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ *sont deux séries convergentes de sommes* x *et* y *respectivement, la série* $\sum_{k=0}^{\infty}(c_1x_k + c_2y_k)$ *converge et est de somme* $c_1x + c_2y$ (c_1, c_2 *sont des constantes arbitraires*).

L'assertion du théorème découle de la propriété correspondante des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ et de l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}(c_1S_n + c_2\bar{S}_n) = c_1\lim_{n\to\infty} S_n + c_2\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n.$$

Théorème. *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *et* $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ *sont deux séries absolument convergentes de sommes* x *et* y *respectivement, la série composée des produits* x_ky_l ($k = 0, 1, 2, \ldots ; l = 0, 1, 2, \ldots$) *numérotés dans un ordre quelconque, est aussi absolument convergente et de somme* xy.

☐ Notons $z_0, z_1, z_2, \ldots$ les produits de la forme x_ky_l numérotés arbitrairement, $k = 0, 1, 2, \ldots ; l = 0, 1, 2, \ldots$ Soit une somme partielle S_n de la série $\sum_{i=0}^{\infty}|z_i|$. La somme S_n est composée des termes de la forme $|x_ky_l|$. Soit $m = \max\{k, l\}$. Alors

$$S_n \leqslant \sum_{0\leqslant k,\, l\leqslant m}|x_ky_l| = \left(\sum_{k=0}^{m}|x_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{m}|y_l|\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|x_k| \sum_{l=0}^{\infty}|y_l| < \infty.$$

Ainsi donc, la série $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ est absolument convergente d'après le critère de convergence des séries. Mais dans ce cas la somme de cette série est indépendante de l'ordre de sommation. Rangeons les produits $x_k y_l$, pour m fixe, dans l'ordre suivant : $x_0 y_m$, $x_m y_0$, $x_1 y_m$, $x_m y_1$, $x_2 y_m$, $x_m y_2$, ..., $x_{m-1} y_m$, $x_m y_{m-1}$, $x_m y_m$. En augmentant m d'une unité, on obtient de nouvelles familles de produits $x_k y_l$ pour de nouveaux m fixes. On en épuise finalement toutes. Pour trouver la somme de la série obtenue, calculons la somme partielle σ_N de termes tels que $m \leqslant N$. Les produits correspondants $x_k y_l$ sont indiciés dans ce cas par des $k \leqslant N$, $l \leqslant N$. Donc

$$\sigma_N = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} x_k y_l = \sum_{k=0}^{N} x_k \sum_{l=0}^{N} y_l.$$

La somme de la série $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ est égale à la limite des sommes σ_N quand $N \to \infty$, d'où $\sum_{i=0}^{\infty} z_i = xy$. ■

§ 5. Suites et séries de nombres complexes et de vecteurs

La notion de suite de nombres complexes ou de vecteurs se définit de la même manière que celles de suite numérique ou de série numérique.

De même que pour les suites et les séries numériques, on utilise les notions de module d'un nombre complexe ou d'un vecteur pour introduire celles de suite et de série convergentes de nombres complexes ou de vecteurs et l'on prouve les propriétés des suites et des séries, établies pour le cas réel, sauf celles qui ont recours à l'opération de comparaison (laquelle n'est pas définie pour les nombres complexes et les vecteurs). Ne s'établissent non plus les propriétés liées aux opérations de multiplication ou de division de termes des suites ou des séries de vecteurs, ces opérations n'étant pas définies pour les vecteurs.

La convergence d'une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes $z_n = x_n + iy_n$ est liée à celle des suites numériques $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$.

Théorème. *Pour qu'une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes soit convergente, il faut et il suffit que convergent les suites $\{x_n\} = \{\operatorname{Re} z_n\}$ et $\{y_n\} = \{\operatorname{Im} z_n\}$.*

□ *Nécessité.* Supposons que la suite $\{z_n\}$ de nombres complexes tend vers un nombre complexe $c = a + ib$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un numéro $N = N(\varepsilon)$ tel que $|z_n - c| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Comme

$|x_n - a| \leqslant |z_n - c|$, $|y_n - b| \leqslant |z_n - c|$, on a $|x_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - b| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ convergent respectivement vers a et b.

Suffisance. Supposons que les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ tendent respectivement vers a et b. Alors, quels que soient $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, il existe des numéros $N_1 = N_1(\varepsilon_1)$ et $N_2 = N_2(\varepsilon_2)$ tels que $|x_n - a| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N_1(\varepsilon_1)$, $|y_n - b| < \varepsilon_2$ pour $n \geqslant N_2(\varepsilon_2)$. Choisissons les nombres ε_1 et ε_2 à partir de la condition $\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque, et posons $c = a + ib$, $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour $n \geqslant N$, ont lieu les inégalités $|z_n - c| = \sqrt{|x_n - a|^2 + |y_n - b|^2} < \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\{z_n\}$ de nombres complexes converge vers le nombre complexe $c = a + ib$. ■

A l'aide de la méthode utilisée pour la démonstration du théorème précédent on déduit, à partir du critère de Cauchy de convergence des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$, le critère de Cauchy de convergence de la suite $\{z_n\}$ de nombres complexes, $z_n = x_n + iy_n$.

La convergence des séries $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$, $z_k = x_k + iy_k$ de nombres complexes se définit, tout comme dans le cas des séries numériques, à l'aide de la notion de convergence des suites. Pour les séries de nombres complexes ont également lieu le critère de Cauchy et le critère de comparaison qui en découle : si pour $k \geqslant N_0$ sont vérifiées les inégalités $|a_k| \leqslant b_k$ et la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, alors la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge aussi. En particulier, la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si converge la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Tous les critères de convergence absolue des séries découlant du critère de comparaison sont également vrais.

Tout comme dans le cas d'une suite numérique, la suite $\{c_n\}$ de nombres complexes est convergente ou divergente en même temps que la série

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+1} - c_k].$$

Considérons à titre d'exemple la question de la convergence des séries entières, c'est-à-dire des séries de la forme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, où $c_k = a_k + ib_k$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, a_k, b_k, x, y, x_0, y_0 sont des nombres réels. D'après le critère de Cauchy, cette série est absolument convergente si $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k(z - z_0)^k|} < 1$; elle est divergente si la limite indiquée est > 1.

Posons $R = 1/\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_k|}$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ est convergente pour $|z - z_0| < R$ et divergente pour $|z - z_0| > R$. Si $|z - z_0| = R$, la série entière peut aussi bien être convergente que divergente. L'ensemble des valeurs z dans le plan complexe satisfaisant à l'inégalité $|z - z_0| < R$ étant un disque de rayon R centré en z_0, on appelle R *rayon de convergence* de la série entière donnée.

Signalons la propriété suivante des séries entières : *si une série* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ *converge pour un certain* $z = \tilde{z}$, *elle converge pour tous les* z *satisfaisant à l'inégalité* $|z - z_0| < |\tilde{z} - z_0|$. En effet, si l'inégalité précédente est remplie, on a $|z - z_0| < R$, puisque $|\tilde{z} - z_0| \leqslant R$.

Si $c_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, et la limite $\lim_{k\to\infty} |c_{k+1}/c_k| = A$ existe, on s'assure, le critère de D'Alembert aidant, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ est convergente pour $|z - z_0| < 1/A$ et divergente pour $|z - z_0| > 1/A$, c'est-à-dire $R = 1/A$.

Montrons que les ensembles de nombres complexes sont justiciables du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème. *Tout ensemble de nombres complexes A borné infini admet au moins un point limite.*

□ Pour tout élément $z = x + iy$ de A, on a $|z| \leqslant c$, où c est une constante. Mais dans ce cas $|x| \leqslant c$, $|y| \leqslant c$, c'est-à-dire que les ensembles des parties réelle et imaginaire des z complexes sont bornés. Un au moins de ces ensembles est infini. Supposons pour fixer les idées que c'est l'ensemble des x. Alors c'est un ensemble x infini et borné et contient, par conséquent, au moins un point limite ; notons-le a. Ceci signifie qu'on peut extraire, de l'ensemble des x, une suite de nombres x_n distincts convergeant vers a (cf. la remarque en fin du § 1). D'autre part, à chaque nombre x_n il correspond dans l'ensemble A au moins un nombre $z_n = x_n + iy_n$ dont x_n constitue la partie réelle. La suite $\{y_n\}$ est bornée ($|y_n| \leqslant c$) et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une suite $\{y_{k_n}\}$ convergeant vers un nombre b. Mais dans ce cas les suites $\{x_{k_n}\}$ et $\{y_{k_n}\}$ des parties réelle et imaginaire des nombres $\{z_{k_n}\}$ distincts formant la suite $\{z_{k_n}\}$ tendent respectivement vers a et b. Donc $\lim_{n\to\infty} z_{k_n} = \tilde{c} = a + ib$. Le nombre complexe $\tilde{c}$ est point limite de l'ensemble A, puisque dans tout ε-voisinage du point $\tilde{c}$ on peut trouver des points de la forme $z_{k_n} \neq \tilde{c}$ appartenant à l'ensemble considéré. ■

Des théorèmes analogues à ceux formulés pour les suites et séries de nombres complexes ont lieu pour les suites et séries de vecteurs.

Théorème. *Pour la convergence d'une suite* $\{x_n\}$ *de vecteurs* $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm})$ *il faut et il suffit que soient convergentes les suites* $\{x_{nk}\}$ *des composantes de ces vecteurs,* $k = 1, 2, \ldots, m$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *Tout ensemble borné infini A d'un espace vectoriel admet au moins un point limite.*

Ces théorèmes se démontrent tout comme pour l'ensemble de nombres complexes, à cette différence près qu'au lieu des parties réelle et imaginaire des nombres complexes il faut considérer les composantes des vecteurs. On se servira des inégalités $|u_k| \leqslant |u|$ pour les vecteurs $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, analogues aux inégalités correspondantes pour les nombres complexes.

Le critère de Cauchy et tous les critères de convergence absolue des séries sont valables pour les suites et séries de vecteurs. A l'aide du critère de Cauchy on prouve, tout comme dans les cas réel et complexe, la convergence de la série de vecteurs $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ lorsque $|u_k| \leqslant v_k$ pour $k \geqslant N_0$ et la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge. Signalons le critère de convergence d'une suite $\{u_n\}$ de vecteurs : la suite $\{u_n\}$ est convergente ou divergente selon qu'est convergente ou divergente la série $\sum_{k=0}^{\infty} [u_{k+1} - u_k]$. En particulier, la suite de vecteurs $\{u_n\}$ est convergente si converge la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|$.

CHAPITRE 3

LIMITE D'UNE FONCTION. FONCTIONS CONTINUES

§ 1. Méthodes de définitions des fonctions

Soit donnée une loi f associant à chaque nombre x, appartenant à un ensemble numérique A, un certain nombre y. On dit qu'est *donnée* une fonction $y = f(x)$.

On peut considérer également une fonction de plusieurs variables : $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, où à un ensemble de nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_m$ est associé un nombre $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Il est commode de considérer l'ensemble de nombres $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme un point d'un espace vectoriel à m dimensions (notation abrégée : $y = f(x)$, où $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_m)$). Autres notations usuelles : $z = f(x, y)$ pour une fonction de deux variables, $u = f(x, y, z)$ pour une fonction de trois variables. Dans l'espace tridimensionnel, on appelle *rayon vecteur* un vecteur $\mathbf{r}$ de composantes x, y, z, d'où la notation $f(\mathbf{r})$ pour une fonction de trois variables.

On appelle *domaine de définition* d'une fonction $y = f(x)$ l'ensemble A des points x pour lesquels la fonction $f(x)$ est définie, et *domaine des valeurs* de la fonction $y = f(x)$ l'ensemble B des valeurs de y. Une variable x, numérique ou vectorielle, s'appelle *variable indépendante,* ou *argument,* et la variable y, *variable dépendante.* Une fonction $y = f(x)$ de domaine de définition A et de domaine des valeurs B est dite *bornée supérieurement* (resp. *inférieurement*) si l'ensemble B est borné supérieurement (resp. inférieurement), c'est-à-dire s'il existe un nombre c tel que $f(x) \leqslant c$ pour $x \in A$ (resp. $f(x) \geqslant c$ pour $x \in A$). On définit de façon analogue la notion de fonction bornée et celle de sa borne supérieure (notation : $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup B$).

Nous allons donner les différentes méthodes de définition de fonctions d'une variable.

Méthode analytique. On donne la formule permettant de calculer $f(x)$ pour tout $x \in A$. Par exemple, $y = x^2$, A est un intervalle infini : $-\infty < x < +\infty$.

Méthode graphique. On considère des coordonnées cartésiennes dans le plan (x, y). L'ensemble des valeurs (x, y) prises par une fonction donnée est représenté sous forme d'une courbe. Ainsi, la fonction représentée sur la fig. 5 est définie sur l'intervalle $]a, b[$.

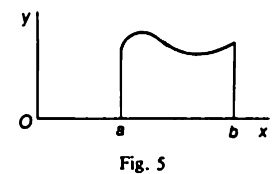


Fig. 5

Méthode tabulaire. On donne les valeurs de y pour une série de valeurs de x sous forme d'un tableau et l'on indique la règle de calcul des y pour des valeurs intermédiaires de x d'après les valeurs tabulaires.

Méthode implicite. On donne une fonction $y = f(x)$ à l'aide d'une relation entre x et y.

Exemple. La relation $x^2 - y^2 = 0$ est satisfaite par $y = x$ et $y = -x$. On dit dans de tels cas que la relation entre les quantités x et y définit une *fonction multivoque*, ou *multivalente.*

Les fonctions que nous allons étudier seront presque toujours univalentes.

Un des moyens de définition implicite de fonctions est la donnée d'une fonction $y = f(x)$ à l'aide de la relation $x = \varphi(y)$. Supposons que pour tous les y pris dans le domaine de définition de la fonction $\varphi(y)$ on a la condition : si $y_1 \neq y_2$, alors $x_1 \neq x_2$, où $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$. A chaque valeur de x on associe alors, à l'aide de la relation $x = \varphi(y)$, une valeur bien déterminée de y, c'est-à-dire que la relation $x = \varphi(y)$ définit une certaine fonction $y = f(x)$. La fonction $f(x)$ est dite inverse de la fonction $\varphi(y)$. Avec ce mode de définition de la fonction $y = f(x)$ on calcule les valeurs de la variable indépendante (argument) x d'après celles de la variable dépendante y.

Un autre moyen de définition implicite de fonctions, fréquemment utilisé, est la donnée d'une fonction $y = f(x)$ à l'aide de deux fonctions : $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$. En effet, si la fonction $x = \psi(t)$ admet une inverse, $t = F(x)$, alors, connaissant x, on trouve la valeur de $t = F(x)$ pour laquelle $x = \psi(t)$. Ayant obtenu t, on calcule $y = \varphi(t)$. Ainsi donc, si la fonction inverse $t = F(x)$ existe, les relations $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ permettent d'établir une relation entre les valeurs de x et y, c'est-à-dire définissent une fonction $y = f(x)$. La variable t s'appelle dans ce cas *paramètre.*

Exercice. Soit $0 < u < 1$ le domaine de définition d'une fonction $f(u)$. Chercher le domaine de définition de la fonction $f(\sin x)$.

§ 2. Limite d'une fonction

Considérons la notion de valeur limite d'une fonction $y = f(x)$ lorsque $x \to a$ (la notation $x \to a$ se lit : x tend vers a). Soit une fonction $y = f(x)$

donnée sur un ensemble A ayant le point $x = a$ pour point limite (A est un ensemble numérique pour une fonction d'une variable et un ensemble vectoriel pour une fonction de plusieurs variables). Citons deux définitions de la limite d'une fonction.

Définition 1. Un nombre b s'appelle *limite d'une fonction* $y = f(x)$ lorsque $x \to a$ si, quelle que soit une suite de points $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, $x_n \in A$, convergeant vers a, la suite correspondante $\{f(x_n)\}$ des valeurs de la fonction converge vers b (notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$).

Définition 2. Un nombre b s'appelle *limite d'une fonction* $y = f(x)$ lorsque $x \to a$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ dépendant de ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tel que pour tous les $x \in A$ satisfaisant à la condition $0 < |x - a| < \delta$, on a l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Montrons que les deux définitions sont équivalentes.

Théorème. *Les définitions* 1 *et* 2 *de la limite d'une fonction sont équivalentes.*

□ Soit b la limite d'une fonction $f(x)$ pour $x \to a$ au sens de la définition 2. Montrons que b est aussi la limite de la fonction $f(x)$ pour $x \to a$ au sens de la définition 1. Soit $\{x_n\}$ une suite convergeant vers a, $x_n \neq a$, $x_n \in A$. Alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe un numéro N tel que $|x_n - a| < \delta$ pour $n \geqslant N$. En outre, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - b| < \varepsilon$ pour $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$. Posons $\delta = \delta(\varepsilon)$ dans l'inégalité $|x_n - a| < \delta$. Alors pour $n \geqslant N = N(\varepsilon)$ on a $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Supposons maintenant que b est la limite de la fonction $f(x)$ lorsque $x \to a$ au sens de la définition 1, sans l'être au sens de la définition 2. Ceci signifie que pour un certain $\varepsilon > 0$ on ne peut exhiber aucun $\delta > 0$ tel que soit satisfaite l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$ pour $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$. Mais alors il existe pour cette valeur ε et tout $\delta > 0$, des points $x \in A$ tels que $0 < |x - a| < \delta$, mais $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$. Posons $\delta = \delta_n$, où $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$. Pour chaque δ_n, cherchons un $x = x_n$ tel que $0 < |x_n - a| < \delta_n$, mais $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$.

La suite $\{x_n\}$ converge vers a. En effet, quel que soit $\delta > 0$, on peut exhiber un numéro N tel que $\delta_n < \delta$ pour $n \geqslant N$, d'où pour $n \geqslant N$ on a $|x_n - a| < \delta_n < \delta$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. D'autre part, la suite $\{f(x_n)\}$ ne peut pas converger vers b en vertu de l'inégalité $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. La contradiction obtenue invalide l'hypothèse faite selon laquelle b est la limite de la fonction $f(x)$ au sens de la définition 1. ■

Formulons maintenant le critère de Cauchy d'existence de la limite

d'une fonction, analogue au critère de Cauchy d'existence de la limite d'une suite.

Théorème (critère de Cauchy). *Pour l'existence de la limite d'une fonction $f(x)$ pour $x \to a$ il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x' - a| < \delta$, $x \in A$, $x' \in A$.*

□ *Nécessité.* Soit $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Alors, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - b| < \varepsilon_1$, $|f(x') - b| < \varepsilon_1$ si $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x' - a| < \delta$, $x \in A$, $x' \in A$. Mais dans ce cas $|f(x) - f(x')| = |[f(x) - b] - [f(x') - b]| \leqslant |f(x) - b| + |f(x') - b| > 2\varepsilon_1$. Si pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, alors pour $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x' - a| < \delta$ on obtient $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, ce que nous voulions.

Suffisance. Supposons que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ pour $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |x' - a| < \delta$, $x \in A$, $x' \in A$. Soit une suite arbitraire $\{x_n\}$ convergeant vers a, $x_n \neq a$, $x_n \in A$. La suite $\{x_n\}$ étant convergente, pour tout $\delta > 0$ il existe un numéro N tel que $|x_n - a| < \delta$, $|x_m - a| < \delta$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Posons $\delta = \delta(\varepsilon)$, $x = x_n$, $x' = x_m$. Nous aboutissons alors à l'inégalité $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, ce qui veut dire que pour la suite $\{f(x_n)\}$ sont remplies les conditions du critère de Cauchy et donc cette suite converge vers un certain nombre b. Montrons que le nombre b ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$ convergeant vers a. En effet, soient $\{x_n\}$ et $\{\tilde{x}_n\}$ des suites qui convergent vers a toutes les deux. Mais alors la suite $x_0, \tilde{x}_0, x_1, \tilde{x}_1, \ldots, x_n, \tilde{x}_n, \ldots$ converge elle aussi vers a et la suite $f(x_0), f(\tilde{x}_0), f(x_1), f(\tilde{x}_1), \ldots$ est convergente. On en déduit que les sous-suites $\{f(x_n)\}$ et $\{f(\tilde{x}_n)\}$ tendent vers une même limite. ■

Introduisons la notion de limite unilatérale qui est utile lors de l'étude des fonctions d'une variable.

Définition. Un nombre b s'appelle *limite à droite* (resp. *à gauche*) d'une fonction $f(x)$ lorsque $x \to a$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - b| < \varepsilon$ pour tous les $x \in A$ satisfaisant à l'inégalité $0 < x - a < \delta$ (resp. $-\delta < x - a < 0$) (notation : $\lim_{x \to a+0} f(x) = b$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = b$, ou $f(a + 0) = b$, $f(a - 0) = b$).

Nous proposons au lecteur de prouver à titre d'exercice le théorème suivant : *une fonction $f(x)$ admet une limite pour $x \to a$ si et seulement si les limites à gauche et à droite de cette fonction existent lorsque $x \to a$ et sont égales entre elles.*

Pour la fonction de plusieurs variables, introduisons la notion de limite

de la fonction dans une direction donnée, notion analogue à celle de limite unilatérale.

Soit $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ un vecteur vérifiant la condition $|w| = 1$ et supposons que tout voisinage d'un point a contient les points de la forme $x(t) = a + tw$, $0 < t \leqslant t_0$, appartenant au domaine de définition de la fonction $f(x)$ (dans un espace tridimensionnel, les points $x(t)$ sont situés sur le rayon issu du point a dans la direction du vecteur w).

Considérons une fonction d'une seule variable t : $\varphi(t) = f(x)$ pour $x = x(t)$. Si la limite $\lim\limits_{t \to 0+0} \varphi(t) = b$ existe, on dit que la fonction $f(x)$ admet au point $x = a$ une limite égale à b dans la direction du vecteur w.

Si une fonction $f(x)$ admet au point $x = a$ une limite, elle l'admet en ce point dans toute direction. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple. Soit une fonction de deux variables $z = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Cette fonction a pour $x = y = 0$ une limite dans la direction de $w = (w_1, w_2)$ égale à

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{w_1^2 t^2 - w_2^2 t^2}{w_1^2 t^2 + w_2^2 t^2} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{w_1^2 + w_2^2} = w_1^2 - w_2^2.$$

La valeur de la limite dépend dans ce cas de la direction, c'est-à-dire que la fonction n'admet pas de limite pour $x = y = 0$.

Nous avons introduit la notion de limite finie d'une fonction $f(x)$. Souvent on a à considérer la limite infinie de la fonction $f(x)$ lorsque $x \to a$ (notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$). On définit cette notion en remplaçant dans la définition de la limite ε par $c > 0$ et les inégalités $|f(x) - b| < \varepsilon$, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ par les suivantes : $|f(x)| > c$, $|f(x_n)| > c$. Les limites $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ se définissent de façon analogue.

Il suffit parfois de connaître une information moins exhaustive sur le comportement d'une fonction. Voyons les définitions suivantes.

Définition. On dit qu'*une fonction $f(x)$ est* dans l'ensemble *A de l'ordre d'une fonction $\varphi(x)$*, ou encore que *$f(x)$ est O grand de $\varphi(x)$* (notation : $f(x) = O(\varphi(x))$) si $|f(x)| \leqslant c|\varphi(x)|$ pour $x \in A$, où c est une constante positive indépendante de x.

En particulier, la relation $f(x) = O(1)$ pour $x \in A$ signifie que la fonction $f(x)$ est bornée sur l'ensemble A. Il est évident que si $f(x) = O(\varphi_1(x))$ et $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ pour $x \in A$, on a $f(x) = O(\varphi_2(x))$ pour $x \in A$.

Exemples. **1.** $\sin x = O(1)$ pour $x \in]-\infty, \infty[$, puisque $|\sin x| \leqslant 1$.

2. $x = O(x^2)$ pour $x \in [1, \infty[$, puisque $|x| \leqslant x^2$ pour $x \geqslant 1$.

Définition. On dit que *la fonction* $f(x)$ *est o petit de* $\varphi(x)$ pour $x \to a$ si $f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ (notation : $f(x) = o(\varphi(x)),\ x \to a$).

Nous nous servirons de la notation $f(x) = O(\varphi(x)),\ x \to a$, s'il existe un voisinage du point a dans lequel $f(x) = O(\varphi(x)),\ x \neq a$.

Dans les deux cas les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ peuvent ne pas être définies pour $x = a$. Pour des fonctions d'une variable, on peut considérer les relations citées non pas dans un voisinage $|x - a| < \varepsilon$, mais dans un voisinage à droite $0 < x - a < \varepsilon$ (resp. à gauche $-\varepsilon < x - a < 0$). Alors il faut remplacer la limite $\varepsilon(x)$ lorsque $x \to a$ par la limite unilatérale correspondante. On peut considérer également les cas $a = +\infty$, $a = -\infty$, $a = \infty$, en utilisant comme voisinages d'un point à l'infini des ensembles définis par l'une des inégalités $x > c$, $x < -c$ ou $|x| > c$. Citons les propriétés des notations que nous venons de définir.

1° Si $f(x) = O(\varphi_1(x))$ et $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ (resp. $f(x) = o(\varphi_1(x))$ et $\varphi_1(x) = o(\varphi_2(x))$) lorsque $x \to a$, alors $f(x) = O(\varphi_2(x))$ (resp. $f(x) = o(\varphi_2(x))$) lorsque $x \to a$.

2° Si $f(x) = O(\varphi(x))$ (resp. $f(x) = o(\varphi(x))$) pour $x \to a$, alors $f(x)\psi(x) = O(\varphi(x)\psi(x))$ (resp. $f(x)\psi(x) = o(\varphi(x)\psi(x))$) pour $x \to a$.

3° Si $f(x) = O(\varphi(x))$ et $\psi(x) = o(\varphi(x))$ pour $x \to a$, alors $f(x) + \psi(x) = O(\varphi(x))$ pour $x \to a$.

Remarquons que la notation $f(x) = o(1)$ pour $x \to a$ est équivalente à la relation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

§ 3. Principales propriétés de la limite d'une fonction

Nous allons considérer les propriétés de la limite d'une fonction qui découlent de sa définition et des propriétés des suites convergentes.

1° Une fonction $f(x)$ ne peut admettre qu'une seule limite pour $x \to a$.

2° Si la fonction $f(x)$ admet pour $x \to a$ une limite égale à b, alors dans un certain voisinage du point $x = a$ la fonction $f(x)$ est bornée (pour $x \neq a$) et le signe du nombre b ne change pas (pour $b \neq 0$).

3° Supposons qu'existent les limites $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, en outre, dans un certain voisinage d'un point a, les fonctions $f_1(x), f_2(x)$ sont définies pour les mêmes valeurs de x. Il existe alors les limites $\lim\limits_{x\to a} [c_1f_1(x) + c_2f_2(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)f_2(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $\left(\text{pour } \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right)$ et

$$\lim_{x\to a} [c_1f_1(x) + c_2f_2(x)] = c_1b_1 + c_2b_2$$

(c_1, c_2 sont des constantes ; en particulier, posant $f_1(x) \equiv f(x), f_2(x) \equiv 0$,

$c_1 = c$ pour $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on a $\lim_{x\to a} cf(x) = cb$),

$$\lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x) = b_1 b_2 ;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1}{b_2} \quad (b_2 \neq 0).$$

4° Si $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ pour $x \in A$ et les limites des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ pour $x \to a$ existent et sont égales respectivement à b_1 et b_2, alors $b_1 \leqslant b_2$. En particulier, si $f(x) \leqslant c$ (c est une constante et $x \in A$) et $f(x)$ admet une limite $\lim_{x\to a} f(x) = b$, alors $b \leqslant c$.

5° Si $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in A$, et les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ admettent pour $x \to a$ des limites égales, alors la fonction $f(x)$ admet la même limite pour $x \to a$.

6° Considérons maintenant la propriété d'une fonction composée d'une variable. Soit une fonction $t = \varphi(x)$ définie sur un ensemble numérique A et ayant B pour domaine des valeurs. Soit une fonction $f(t)$ définie sur B. Alors, si les fonctions $\varphi(x)$ et $f(t)$ admettent respectivement pour limites $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ et $\lim_{t\to b} f(t) = c$ et si $\varphi(x) \neq b$ pour $x \neq a$, alors la fonction composée $z = f(\varphi(x))$ (i.e. $z = f(t)$, où $t = \varphi(x)$) admet pour $x \to a$ une limite égale à c : $\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim_{t\to b} f(t) = c$.

Seules les propriétés 2° et 6° nécessitent une démonstration commentée. Prouvons 2°. Supposons que la fonction $f(x)$ admet pour $x \to a$ une limite égale à b. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un δ tel que $|f(x) - b| < \varepsilon$ pour $x \in A$ et $0 < |x - a| < \delta$. Mais dans ce cas, pour $0 < |x - a| < \delta$, la fonction $f(x)$ est bornée, puisque $|f(x)| = |[f(x) - b] + b| \leqslant |f(x) - - b| + |b| < \varepsilon + |b|$. Comme pour $0 < |x - a| < \delta$ on a $-\varepsilon < f(x) - - b < \varepsilon$, alors $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Si $b \neq 0$, on peut toujours choisir ε aussi petit que les nombres $b - \varepsilon$ et $b + \varepsilon$ soient de même signe avec b (on peut poser par exemple $\varepsilon = |b|/2$). La fonction $f(x)$ admet alors dans le voisinage $0 < |x - a| < \delta$ le même signe que b.

Prouvons maintenant 6°. Soit $\{x_n\}$ une suite quelconque convergeant vers a, $x_n \neq a$. Alors la suite $\{t_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ converge vers $t = b$ et $t_n \neq \neq b$. Mais dans ce cas l'existence de la limite $\lim_{t\to b} f(t) = c$ entraîne la convergence de la suite $\{f(t_n)\} = \{f(\varphi(x_n))\}$ vers c, ce que nous voulions.

Une propriété analogue à la propriété 6° a lieu pour les fonctions de plusieurs variables. Supposons que des fonctions $\varphi_k(x)$ et $f(t)$ admettent respectivement pour limites $\lim_{x\to a} \varphi_k(x) = b_k$, $\lim_{t\to b} f(t) = c$, où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$; $t = (t_1, t_2, \ldots, t_l)$; $k = 1, 2, \ldots, l$; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_l)$. Alors, si pour $x \neq a$ on a $\varphi(x) \neq b$, où $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_l(x))$,

la limite pour $x \to a$ de la fonction composée de m variables $f(\varphi(x)) \equiv f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_l(x))$ existe et est égale à c, i.e. $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{t \to b} f(t)$.

Prouvons cette assertion. Comme $\lim\limits_{x \to a} \varphi_k(x) = b_k$, $\lim\limits_{t \to b} f(t) = c$, alors, quels que soient $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, l$, et $\varepsilon > 0$, il existe des nombres δ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, et δ_0 tels que $|\varphi_k(x) - b_k| < \varepsilon_k$ pour $0 < |x - a| < \delta_k$, $|f(t) - c| < \varepsilon$ pour $0 < |t - b| < \delta_0$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_l)$. Choisissons ε_k à partir de la condition $\delta_0 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{l} \varepsilon_k^l}$ et posons $\delta = \min \delta_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$. Alors pour $0 < |x - a| < \delta$ les inégalités $|\varphi_k(x) - b_k| < \varepsilon_k$ sont simultanément vérifiées. Posant $t = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_l(x))$, on s'assure que $|f(\varphi(x)) - c| < \varepsilon$ pour $0 < |x - a| < \delta$, puisque dans ce cas on a

$$0 < |t - b| = |\varphi(x) - b| =$$
$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{l} |\varphi_k(x) - b_k|^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k^2} = \delta_0,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = c$, ce que nous voulions.

§ 4. Continuité d'une fonction

Soit $f(x)$ une fonction de une ou de plusieurs variables définie sur un ensemble A. Définissons la notion de continuité de la fonction $f(x)$ en un point $a \in A$.

Définition. Une fonction $f(x)$ est dite *continue* en un point a si, quelle que soit une suite de points $\{x_n\}$, $x_n \in A$, convergeant vers a, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(a)$.

La notion de continuité admet, par analogie avec celle de limite d'une fonction, une définition équivalente : une fonction $f(x)$ est dite *continue* en un point a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $|x - a| < \delta$ on a $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Si a est un point limite de l'ensemble A, il découle de la définition de la continuité de la fonction $f(x)$ au point a, l'existence de la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ égale à $f(a)$. L'inégalité $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ est satisfaite pour $x = a$, ce qui nous permet de rejeter la restriction $|x - a| > 0$. Si la fonction $f(x)$ est continue au point a, on dit que le point a est *point de continuité* de la fonction $f(x)$.

Si dans la définition de la continuité de la fonction d'une variable on remplace $\lim_{x \to a} f(x)$ par des limites unilatérales $\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$, on obtient la définition de la continuité de la fonction $f(x)$ au point a respectivement à droite et à gauche. (On définit de façon analogue la continuité dans une direction donnée d'une fonction de plusieurs variables.)

Définition. Soit une fonction $f(x)$ définie sur un ensemble A dont les points de continuité constituent un ensemble $B \subset A$. On dit que la fonction $f(x)$ est *continue* sur B.

Voyons maintenant ce que représentent les points où la fonction $f(x)$ n'est pas continue.

Définition. Un point $x = a$ s'appelle *point de discontinuité* de la fonction $f(x)$ dans les cas suivants :

1) la fonction $y = f(x)$ est définie au point $x = a$, mais ce point n'est pas point de continuité de $f(x)$;

2) le point $x = a$ est point limite pour le domaine de définition de la fonction $f(x)$ et celle-ci admet une limite pour $x \to a$, mais $f(x)$ n'est pas définie en $x = a$.

Soit $x = a$ un point de discontinuité de la fonction $f(x)$ et celle-ci admet une limite pour $x \to a$, mais cette limite ou bien n'est pas égale à $f(a)$, ou bien la fonction $f(x)$ n'est pas définie en $x = a$. Le point $x = a$ s'appelle point de discontinuité non essentielle. Si une fonction d'une variable admet des limites unilatérales $f(a + 0)$ et $f(a - 0)$, mais $f(a + 0) \neq f(a - 0)$ (dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, à la condition $f(a + 0) \neq f(a - 0)$ correspond la condition de dépendance de la limite dans une direction donnée de la direction même), le point $x = a$ s'appelle *point de discontinuité de première espèce*. Dans tous les autres cas il s'agit d'un *point de discontinuité de deuxième espèce*.

Exemples.

1. Soit

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad x < 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0, \\ +1 & \text{pour} \quad x > 0 \end{cases}$$

(sign se lit signum). Le point $x = 0$ est un point de discontinuité de première espèce.

2. Soit $f(x) = 1/x$. Le point $x = 0$ est un point de discontinuité de deuxième espèce, puisque la fonction $f(x)$ n'est pas définie en $x = 0$ et n'admet pas de limites finies $f(0 + 0)$ et $f(0 - 0)$.

3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

Le point $x = 0$ est un point de discontinuité non essentielle.

4. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{pour} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue au point $x = 0$, car $|f(x) - f(0)| \leqslant \leqslant |x| < \varepsilon$ pour $|x| < \varepsilon$. En même temps, aux points de la forme $x_n = \dfrac{1}{\pi(n + 1/2)}$, $n = 1, 2, \ldots$, aussi proches que l'on veut de zéro pour n assez grands, la fonction prend aussi bien des valeurs positives que négatives.

Citons les principales propriétés des fonctions continues en un point $x = a$, propriétés qui découlent de la définition de la continuité et des propriétés correspondantes de la limite d'une fonction.

1° Si une fonction $f(x)$ est définie dans un voisinage d'un point $x = a$ et est continue en ce point, il existe alors un voisinage de a dans lequel la fonction $f(x)$ est bornée et où $f(a)$ ne change pas de signe si $f(a) \neq 0$.

2° Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ des fonctions continues en un point $x = a$. Alors sont également continues en ce point les fonctions $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ (c_1, c_2 étant des constantes quelconques), $f_1(x) f_2(x)$, $f_1(x)/f_2(x)$ (pour $f_2(a) \neq 0$).

3° Soient $t_k = \varphi_k(x)$ des fonctions définies sur un ensemble A et supposons que la fonction vectorielle $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x))$ a un ensemble B pour l'ensemble des valeurs et une fonction $y = f(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_l)$ est définie sur B. Alors si les fonctions $t_k = \varphi_k(x)$ sont continues en $x = a$ et la fonction $f(t)$ l'est en $t = b$, $b = \varphi(a)$, la fonction composée $y = f(\varphi(x))$ est continue en $x = a$.

Dans 3°, on n'a pas besoin d'exiger accessoirement que $\varphi(x) \neq b$ pour $x \neq a$ comme on le fait dans la propriété correspondante de la limite d'une fonction, puisque dans la définition de la continuité de la fonction $f(t)$ en $t = b$ on peut supprimer la restriction $t \neq b$, étant donné que l'inégalité $|f(t) - f(b)| < \varepsilon$ est automatiquement satisfaite pour $t = b$.

Exercice. Montrer que si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont continues dans un ensemble A, les fonctions $\varphi(x) = \min\,[f(x) + 1,\ g(x) - 1]$ et $\psi(x) = \max\,[f(x), g(x)]$ sont également continues dans cet ensemble.

§ 5. Quelques propriétés des fonctions continues sur un ensemble borné fermé

Les fonctions qui sont continues sur un ensemble borné et fermé présentent toute une série de propriétés remarquables. Introduisons préalablement la notion de continuité uniforme.

Définition. Une fonction $f(x)$ d'une ou de plusieurs variables continue sur un ensemble A est dite *uniformément continue* sur cet ensemble si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour deux points quelconques $x, x' \in A$ vérifiant la condition $|x - x'| < \delta$ on a l'inégalité $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

La notion de continuité uniforme diffère de celle de continuité en un point $x \in A$ par ce que la quantité δ ne dépend pas de x.

Exemple. Montrons que pour $x \in]0, 1[$ la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ n'est pas uniformément continue. En effet, posons $x_n = 1/(\pi n + \pi/2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Alors $f(x_{2n}) = 1$, $f(x_{2n+1}) = -1$. Comme $x_{2n+1} - x_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et comme $|f(x_{2n+1}) - f(x_{2n})| = 2$, il n'existe pour $\varepsilon < 2$ aucun δ indépendant de x tel que pour $|x - x'| < \delta$ soit satisfaite l'inégalité $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ (en particulier, on ne peut pas satisfaire à ces conditions pour $x = x_{2n+1}$, $x' = x_{2n}$, où n est choisi à partir de la condition $|x_{2n+1} - x_{2n}| < \delta$). La fonction $f(x)$ n'est donc pas uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

Une fonction $f(x)$ continue sur un ensemble borné et fermé est uniformément continue sur cet ensemble.

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction définie et continue sur un ensemble borné et fermé A. Cette fonction possède alors les propriétés suivantes :*

1° *elle est bornée ;*

2° *elle prend sur A sa plus grande et sa plus petite valeur (c'est-à-dire que la fonction atteint en certains points x_1 et $x_2 \in A$ ses bornes $\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf\limits_{x\in A} f(x)$) ;*

3° *la fonction $f(x)$ est uniformément continue sur l'ensemble A.*

□ 1° Supposons que la fonction $f(x)$ n'est pas bornée sur A. Alors pour tout $c > 0$ il doit exister un point $x \in A$ tel que $|f(x)| > c$. Soient $c = n$, $n = 1, 2, \ldots$, et x_n les points correspondants en lesquels $|f(x)| > n$, i.e. $|f(x_n)| > n$. Les points x_n peuvent être considérés distincts, étant donné qu'on peut toujours choisir le point x_{n+1} à partir de la condition $|f(x_{n+1})| > |f(x_n)|$. L'ensemble des points x_n est borné puisque l'ensemble A est borné. Par conséquent, il existe une sous-suite convergente $\{x_{k_n}\}$ de la suite $\{x_n\}$. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. Le point a est un point limite de l'ensemble A et doit lui appartenir car A est fermé. Mais $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) \neq f(a)$ puisque la suite $\{f(x_{k_n})\}$ n'est pas bornée. Nous avons abouti à une contradiction qui nous convainc que la fonction $f(x)$ doit être bornée sur A.

2° Supposons que $f(x) \neq \sup\limits_{x\in A} f(x) = M$ pour tout $x \in A$. La fonction

$\varphi(x) = 1/(M - f(x))$ est alors continue sur l'ensemble A et y prend des valeurs positives. Elle est donc bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\mu > 0$ tel que $\varphi(x) \leqslant \mu$ pour $x \in A$. D'où $M - f(x) \geqslant 1/\mu$, $f(x) \leqslant M - 1/\mu$. Nous avons abouti à une contradiction, car nous avons trouvé un majorant des valeurs de la fonction $f(x)$ qui est plus petit que la borne supérieure. Il doit donc exister un point $x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$. On démontre de façon analogue l'existence d'un point $x_2 \in A$ tel que $f(x_2) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

3° Supposons que la fonction $f(x)$ n'est pas uniformément continue sur l'ensemble A. Ceci signifie que pour un certin $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, il existe des points $x, x' \in A$ tels que $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$, bien que $|x - x'| < \delta$.

Choisissons une suite $\{\delta_n\}$ convergeant vers zéro et désignons les points x et x' pour $\delta = \delta_n$ respectivement par x_n et x_n'. On a $|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon$ et $|x_n - x_n'| < \delta_n$.

La suite $\{x_n\}$ est bornée. On peut donc choisir une sous-suite $\{x_{k_n}\}$ convergeant vers un certain point a. L'ensemble A étant fermé, on a $a \in A$. La sous-suite $\{x_{k_n}'\}$ converge elle aussi vers le point a, puisque $|x_{k_n} - x_{k_n}'| < \delta_n$ et $\delta_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Ainsi donc, on a obtenu deux suites, $\{x_{k_n}\}$ et $\{x_{k_n}'\}$, qui convergent toutes les deux vers a, tandis que les suites $\{f(x_{k_n})\}$ et $\{f(x_{k_n}')\}$ si elles convergent, tendent vers des limites différentes, car $|f(x_{k_n}) - f(x_{k_n}')| \geqslant \varepsilon$. Le résultat obtenu contredit l'hypothèse de la continuité de la fonction $f(x)$ au point $x = a$, donc la fonction $f(x)$ est uniformément continue sur l'ensemble A. ■

Au théorème que nous venons de prouver se rattache le théorème suivant portant sur les propriétés d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et non sur un ensemble fermé borné (aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$, la fonction $f(x)$ est supposée continue à gauche et à droite respectivement).

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$, la fonction $f(x)$ admet sur l'intervalle $]a, b[$ toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.*

□ Soit, pour fixer les idées, $f(a) < f(b)$ (le cas de $f(a) > f(b)$ se traitant de façon analogue) et le nombre γ satisfait à la condition $f(a) < \gamma < f(b)$. Considérons une fonction $\varphi(x) = f(x) - \gamma$. Il est évident que $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$. Divisons l'intervalle $[a, b]$ en deux. Si $\varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, alors $f(x) = \gamma$ pour $x = \dfrac{a+b}{2}$. Si $\varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \neq 0$, on considère à l'étape suivante, au lieu de l'intervalle $[a, b]$, l'intervalle

$[a_1, b_1]$, où $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ pour $\varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ et $a_1 = a$, $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$ pour $\varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$. Alors $\varphi(a_1) < 0$, $\varphi(b_1) > 0$, $b_1 - a_1 = (b-a)/2$. En poursuivant la division de l'intervalle en deux, nous obtenons les intervalles $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ et ainsi de suite. En définitive, nous aboutissons à une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, tels que $\varphi(a_n) < 0$, $\varphi(b_n) > 0$. Si, pour un n quelconque, la procédure de division des intervalles s'arrête, cela voudra dire qu'on a trouvé le point où $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) = \gamma$. Si ce processus n'a pas de fin, les nombres a_n forment une suite croissante bornée supérieurement, puisque $a_n < b_n \leqslant b$. Il existe donc la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. On démontre de même l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Comme $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. Les inégalités $\varphi(a_n) < 0$ et $\varphi(b_n) > 0$ entraînent respectivement $\varphi(x_0) \leqslant 0$ et $\varphi(x_0) \geqslant 0$, donc $\varphi(x_0) = 0$ et $f(x_0) = \gamma$. ■

Corollaire. *Une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle $[a, b]$ admet sur cet intervalle toute valeur comprise entre* $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *et* $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

L'assertion découle du théorème que nous venons de prouver et du n° 2 du théorème précédent.

Remarque. Le procédé de recherche de la racine x_0 de l'équation $\varphi(x) = 0$ décrit dans le théorème s'appelle *méthode de la fourchette*. Elle a une valeur pratique. En choisissant pour n donné au lieu de la racine x_0 une valeur $(a_n + b_n)/2$, on obtient la valeur de x_0 à $(b_n - a_n)/2 = (b-a)/2^{n+1}$ près. On verra dans la suite quelques méthodes de recherche des racines d'une équation où les approximations successives de la racine convergent plus vite vers sa valeur exacte.

§ 6. Fonctions monotones

Considérons la classe de fonctions d'une variable dont la particularité est qu'elles sont monotones.

Définition. Une fonction $f(x)$ est dite *monotone croissante* (resp. *monotone décroissante*) sur un ensemble A si l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne pour x_1, $x_2 \in A$ quelconques l'inégalité $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Si l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$), la fonction $f(x)$ s'appelle *strictement croissante* (resp. *décroissante*) sur l'ensemble A. Les fonctions croissantes, décroissantes, ainsi que strictement croissantes et décroissantes sont dites *monotones*. Les fonctions strictement croissantes et décroissantes sont dites *strictement monotones*.

Voyons quelles sont les propriétés des fonctions monotones.

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction monotone sur l'intervalle* $]a, b[$. *Alors en chaque point* $\xi \in]a, b[$ *la fonction admet des limites unilatérales* $f(\xi - 0)$ *et* $f(\xi + 0)$, *la valeur* $f(\xi)$ *étant comprise entre les nombres* $f(\xi - 0)$ *et* $f(\xi + 0)$.

□ Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(x)$ est monotone croissante sur $]a, b[$ (le cas d'une fonction monotone décroissante se traite de façon analogue). Pour $x < \xi$ on a $f(x) \leqslant f(\xi)$, d'où $\sup\limits_{x<\xi} f(x) \leqslant f(\xi)$. Montrons que $\sup\limits_{x<\xi} f(x) = f(\xi - 0)$. En vertu de la propriété de la borne supérieure, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un x_0 tel que $x_0 < \xi$ et $f(x_0) > \sup\limits_{x<\xi} f(x) - \varepsilon$. Mais alors, pour tout x satisfaisant à l'inégalité $x_0 < x < \xi$, on a

$$\sup_{x<\xi} f(x) - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{x<\xi} f(x).$$

Ceci signifie précisément que $\sup\limits_{x<\xi} f(x) = f(\xi - 0)$. Comme pour $x < \xi$ on a $f(x) \leqslant f(\xi)$, alors

$$f(\xi - 0) = \sup_{x<\xi} f(x) \leqslant f(\xi).$$

On montre en parfaite analogie que $\inf\limits_{x>\xi} f(x) = f(\xi + 0)$ et $f(\xi + 0) \geqslant f(\xi)$. ■

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ est monotone et continue sur l'intervalle $]a, b[$ ou sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(x)$ est monotone et continue sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend sur cet intervalle toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, puisque les bornes inférieure $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et supérieure $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ coïncident soit avec $f(a)$, soit avec $f(b)$ (les fonctions monotones n'admettent leur minimum et leur maximum qu'aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$). Si la fonction $f(x)$ est monotone et continue sur l'intervalle $]a, b[$, elle prend sur cet intervalle toutes les valeurs comprises entre $f(a + 0)$ et $f(b - 0)$ si $a < b$.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(x)$ est monotone croissante (le cas d'une fonction $f(x)$ monotone décroissante se traite de façon analogue). Alors $f(a + 0) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$, $f(b - 0) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

Soit un γ satisfaisant à l'inégalité $f(a + 0) < \gamma < f(b - 0)$. Par définition des bornes inf et sup, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des valeurs $x_1, x_2 \in]a, b[$

tels que $f(a+0) < f(x_1) < f(a+0) + \varepsilon$ et $f(b-0) - \varepsilon < f(x_2) < f(b-0)$. Choisissons ε à partir de la condition $f(a+0) + \varepsilon < \gamma < f(b-0) - \varepsilon$. Alors $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$.

Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ la fonction $f(x)$ est monotone et continue. Elle prend donc, sur cet intervalle, toute valeur comprise entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et, en particulier, pour un certain $x = x_0$, elle prend une valeur égale à γ, ce que nous voulions. L'assertion est vraie pour des valeurs $f(a+0)$ et $f(b-0)$ infinies.

Les fonctions continues strictement monotones $f(x)$ définies sur un intervalle $[a, b]$ ou $]a, b[$ admettent une fonction inverse.

Théorème *Soit $f(x)$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et*

$$A = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad B = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Il existe alors, sur l'intervalle $[A, B]$, une fonction continue et strictement monotone $\varphi(y)$, inverse de $f(x)$.

□ Comme déjà montré, la fonction $f(x)$ peut prendre toute valeur γ comprise entre A et B. D'autre part, par définition d'une fonction strictement monotone, la valeur γ ne peut correspondre qu'à un seul $x \in [a, b]$. Ceci signifie que sur l'intervalle $[A, B]$ il existe une fonction $x = \varphi(y)$ inverse de $y = f(x)$. Montrons que cette fonction est strictement monotone et continue. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(x)$ est strictement croissante. Alors l'inégalité $x_2 > x_1$ entraîne $f(x_2) > f(x_1)$ et inversement, $f(x_2) > f(x_1)$ entraîne $x_2 > x_1$ (s'il n'en était pas ainsi, on aurait une contradiction). Posons $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Alors $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$, d'où pour $y_2 > y_1$ on a $\varphi(y_2) > \varphi(y_1)$, donc la fonction $\varphi(y)$ est strictement croissante.

Prouvons la continuité de la fonction $\varphi(y)$. Soit $x_0 \in]a, b[$ et le nombre $\varepsilon > 0$ est choisi aussi petit que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset]a, b[$. Posons $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, $\delta = \min[(y_2 - y_0), (y_0 - y_1)]$. Alors pour $|y - y_0| < \delta$ on a $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. En effet, $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$, puisque $y_1 = y_0 - (y_0 - y_1) \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_0 + (y_2 - y_0) = y_2$, d'où pour $|y - y_0| < \delta$ on a $y_1 < y < y_2$. La fonction $\varphi(y)$ étant pour $|y - y_0| < \delta$ strictement croissante, on a

$$x_0 - \varepsilon = \varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon, \text{ i.e. } |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

Cette inégalité démontre précisément la continuité de la fonction $\varphi(y)$ aux points $y_0 \in]A, B[$. La continuité de $\varphi(y)$ aux extrémités de l'intervalle $]A, B[$ se prouve de façon analogue. ■

Dans les conditions du théorème, on peut prendre au lieu de l'intervalle

$[a, b]$, l'intervalle $]a, b[$ ou les intervalles semi-ouverts à droite $[a, b[$ et à gauche $]a, b]$, en remplaçant $[A, B]$ respectivement par $]A, B[$, $[A, B[$ ou $]A, B]$.

Exercice. Soit $\omega(\delta) = \sup\limits_{x, x' \in A, |x - x'| < \delta} |f(x) - f(x')|$, où la fonction $f(x)$ est définie sur l'ensemble A. Montrer que la condition nécessaire et suffisante de la continuité uniforme de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble A est que $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(\delta) = 0$.

Indication. Montrer préalablement que la fonction $\omega(\delta)$ est monotone croissante et donc la limite $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(\delta)$ existe.

§ 7. Fonctions élémentaires

1. *Fonction puissance.* La continuité et la stricte monotonie de la fonction $y = x$ s'établissent immédiatement. En vertu des propriétés des fonctions continues, la fonction puissance $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, est continue pour $-\infty < x < +\infty$ également. Considérons cette fonction pour $x > 0$. Elle y est strictement croissante et prend des valeurs comprises entre 0 et $+\infty$. Il doit donc exister la fonction inverse $x = \varphi(y) = y^{1/n}$ strictement croissante et continue qu'on appelle racine n-ième de y. La continuité et la monotonie de la fonction puissance $y = x^\alpha$ pour $\alpha \geqslant 0$ rationnel quelconque découle de la continuité et de la monotonie des fonctions $y = x^n$ et $y = x^{1/n}$, des propriétés des fonctions continues et de la relation

$$x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m, \quad x > 0.$$

Soit maintenant α un réel strictement positif quelconque, et soient α_m, $\bar{\alpha}_m$ ses approximations à m décimales. Par définition de x^α, on a pour $x > 1$: $x^{\alpha_m} < x^\alpha < x^{\bar{\alpha}_m}$. Comme $1^{\alpha_m} = 1^{\bar{\alpha}_m} = 1$, la continuité des fonctions x^{α_m}, $x^{\bar{\alpha}_m}$ entraîne $\lim\limits_{x \to 1+0} x^{\alpha_m} = \lim\limits_{x \to 1+0} x^{\bar{\alpha}_m} = 1$. D'où, en vertu du théorème de comparaison pour la limite d'une fonction, $\lim\limits_{x \to 1+0} x^\alpha = 1$. On démontre de façon analogue que $\lim\limits_{x \to 1-0} x^\alpha = 1$. Il s'ensuit que la fonction x^α est continue au point $x = 1$ pour $\alpha > 0$.

Prouvons maintenant la continuité de x^α en un point x_0 arbitraire pour $x_0 > 0$. On a

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = \lim_{x \to x_0} x_0^\alpha (x/x_0)^\alpha = x_0^\alpha \lim_{t \to 1} t^\alpha = x_0^\alpha \ (t = x/x_0).$$

La fonction x^α est donc continue pour $x > 0$, $\alpha > 0$. Si $\alpha < 0$, la continuité de x^α s'ensuit de la relation $x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$.

Montrons la monotonie de la fonction puissance. Si $x_2 > x_1$ et $\alpha > 0$, alors $x_2^\alpha / x_1^\alpha = (x_2/x_1)^\alpha > 1$, c'est-à-dire que la fonction x^α est strictement

croissante pour $\alpha > 0$. De la relation $x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$ on déduit que pour $\alpha < 0$ la fonction x^α est strictement décroissante. Le domaine des valeurs de la fonction x^α est l'intervalle $]0, \infty[$ si $x > 0$.

2. *Fonctions exponentielle et logarithmique.* Soit une fonction $y = a^x$ pour $a > 0$. Si $a > 1$, cette fonction est strictement croissante, puisque pour $x_2 > x_1$ on a $a^{x_2}/a^{x_1} = a^{x_2-x_1} > a^0 = 1$.

Par des raisonnements analogues on montre que pour $a < 1$ la fonction $y = a^x$ est strictement décroissante. Le domaine de définition de la fonction a^x est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, son domaine des valeurs est l'intervalle $]0, +\infty[$. La fonction $y = a^x$ s'appelle fonction *exponentielle.* Démontrons sa continuité. Prouvons préalablement la relation $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. Soit, pour fixer les idées, $a > 1$. Alors pour $-1/n < x < 1/n$ on a $1/a^{1/n} = a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}$. Reste à se servir de la relation $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ et du théorème de comparaison pour les limites. Le cas de $a < 1$ se démontre par des raisonnements analogues.

La continuité de la fonction $y = a^x$ est maintenant facile à démontrer :

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0}, \quad t = x - x_0.$$

En vertu du théorème stipulant l'existence, pour une fonction continue strictement monotone, d'une fonction inverse possédant les mêmes propriétés, la fonction $y = a^x$ admet une fonction inverse continue strictement monotone qui s'appelle *logarithmique* (notation : $x = \log_a y$). Cette fonction est strictement croissante pour $a > 1$ et strictement décroissante pour $a < 1$. Le domaine de définition de la fonction logarithmique est l'intervalle $]0, +\infty[$, son domaine des valeurs, l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Le nombre a s'appelle *base* de la fonction $x = \log_a y$. Si l'on prend pour base le nombre $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$, la fonction $\log_\mathrm{e} x$ se note $\ln x$ ou $\log x$ et porte le nom de fonction *logarithme népérien* de x.

Outre la fonction exponentielle, en Analyse sont largement utilisées les fonctions

$$\operatorname{ch} x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2, \qquad \operatorname{sh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2,$$
$$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{coth} x = \operatorname{ch} x/\operatorname{sh} x,$$

qui s'appellent respectivement *cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique* et *cotangente hyperbolique.* Donnons les propriétés de ces fonctions. La fonction $\operatorname{ch} x$ est paire, les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$, impaires (rappelons qu'une fonction $f(x)$ vérifiant la relation $f(-x) = f(x)$ est paire et la relation $f(-x) = -f(x)$ est impaire). Le domaine de définition de toutes les fonctions hyperboliques est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ (pour la fonction $\operatorname{coth} x$ le point $x = 0$ n'appartient pas au domaine de définition).

Citons les très importantes relations qui sont immédiates :

$$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2,$$
$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2.$$

De ces relations découlent les formules analogues

$$\operatorname{th}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{th} x_1 + \operatorname{th} x_2}{1 + \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}, \quad \operatorname{coth}(x_1 + x_2) = \frac{1 + \operatorname{coth} x_1 \operatorname{coth} x_2}{\operatorname{coth} x_1 + \operatorname{coth} x_2}.$$

Toutes les fonctions hyperboliques prennent des valeurs strictement positives pour $x > 0$. En outre, on tire de la relation $1 = \operatorname{ch}(x - x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$ que $\operatorname{ch} x \geqslant 1$. Les domaines des valeurs des fonctions hyperboliques sont les suivants : $]-\infty, +\infty[$ pour sh x ; $[1, +\infty[$ pour ch x ; $]-1, +1[$ pour th x ; $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ pour coth x.

Les fonctions sh x, ch x, th x sont strictement croissantes pour $x > 0$ et la fonction coth x est strictement décroissante pour $x > 0$. La monotonie des fonctions hyperboliques découle pour $x > 0$ des formules indiquées plus haut pour $\operatorname{sh}(x_1 + x_2)$, $\operatorname{ch}(x_1 + x_2)$, $\operatorname{th}(x_1 + x_2)$, $\operatorname{coth}(x_1 + x_2)$ et pour $x < 0$, de la parité ou de l'imparité des fonctions correspondantes.

3. *Fonctions trigonométriques*. Les fonctions trigonométriques, ou circulaires, sont étudiées en mathématiques élémentaires. Indiquons les propriétés de ces fonctions. La fonction cos x est paire, les fonctions sin x, tg x, cotg x, impaires. Les fonctions sin x, cos x sont périodiques de période $2\pi = 6{,}28\ \ldots$, c'est-à-dire vérifient la relation $f(x + 2\pi) = f(x)$. Les fonctions tg x, cotg x sont périodiques de période π. Le domaine de définition de sin x, cos x est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, leur domaine des valeurs est $[-1, +1]$. Le domaine de définition des fonctions tg x, cotg x se détermine à l'aide des relations $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, $\operatorname{cotg} x = \cos x/\sin x$. Indiquons aussi les relations importantes suivantes :

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2,$$
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 (x/2),$$
$$1 + \cos x = 2 \cos^2 (x/2).$$

Avant de démontrer la continuité des fonctions trigonométriques, prouvons l'inégalité $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pour $0 < x < \pi/2$. Elle découle de l'inégalité $S_1 < S_2 < S_3$ (fig. 6), où S_1 est l'aire du triangle OMA, S_2, celle du secteur OMA (de rayon unité), et S_3, celle du triangle OBA. Comme $S_1 = \sin x/2$, $S_2 = x/2$ et $S_3 = \operatorname{tg} x/2$, on a $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Vu que les fonctions sin x et tg x sont impaires, on a une inégalité plus générale : $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$ pour $|x| < \pi/2$. Signalons, en outre, qu'on a l'inégalité $1 - \cos x = 2 \sin^2 (x/2) \leqslant x^2/2$ pour $|x| < \pi$. Des

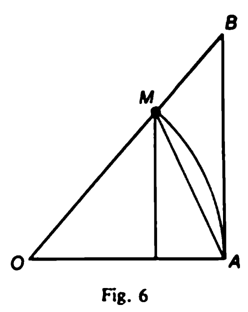


Fig. 6

inégalités indiquées découlent les relations $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ qu'on utilise pour démontrer la continuité de la fonction sin x :

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{t \to 0} \sin (x_0 + t) = \lim_{t \to 0} (\sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t) =$$
$$= \sin x_0, \quad t = x - x_0.$$

On procède de même pour la fonction cos x. La continuité des fonctions tg x, cotg x découle des relations suivantes : tg x = sin x/cos x, cotg x = cos x/sin x. La fonction sin x est par définition strictement croissante pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et strictement décroissante pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$. D'autres domaines de variation monotone de la fonction sin x s'obtiennent en utilisant sa périodicité. Les domaines de variation monotone de la fonction cos x se déduisent de la relation $\cos x = \sin (\pi/2 - x)$. Dans les domaines de variation monotone stricte des fonctions sin x et cos x on peut définir les fonctions strictement monotones et continues inverses : $y = \arcsin x \; (-1 \leqslant x \leqslant +1, \; -\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2)$ et $y = \arccos x \; (-1 \leqslant x \leqslant +1, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi)$ (dans la notation des fonctions inverses, x et y sont remplacés par y et x respectivement). On définit de même les fonctions $y = \text{arc tg}\, x \; (-\infty < x < +\infty, \; -\pi/2 < y < \pi/2)$, $y = \text{arc cotg}\, x \; (-\infty < x < +\infty, \; 0 < y < \pi)$.

Indiquons les relations existant entre les fonctions trigonométriques inverses :

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \qquad \text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x = \pi/2.$$

Si l'on considère d'autres intervalles de variation monotone des fonctions trigonométriques, on obtient d'autres branches des fonctions trigonométriques inverses. On désigne par Arc sin x, Arc cos x, Arc tg x, Arc cotg x l'ensemble des fonctions, inverses respectivement des fonctions $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{cotg}\, x$. Retenons les relations :

$$\text{Arc sin}\, x = (-1)^n \arcsin x + \pi n, \qquad \text{Arc cos}\, x = \pm \arccos x + 2\pi n,$$

$$\text{Arc tg}\, x = \text{arc tg}\, x + \pi n, \quad \text{Arc cotg}\, x = \text{arc cotg}\, x + \pi n,$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Toutes les fonctions trigonométriques que nous venons de considérer s'appellent *fonctions élémentaires primitives*. Les fonctions qui s'en déduisent moyennant les opérations algébriques ou par composition sont dites *élémentaires* tout court.

Voyons en conclusion quelques relations limites pour les fonctions élémentaires dont nous aurons besoin dans la suite. Il s'agit des *limites remarquables*.

1) Démontrons la relation $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x/x) = 1$.

La fonction $\sin x/x$ étant paire, il suffit de considérer la limite à droite. Compte tenu de l'inégalité $\sin x < x < \text{tg}\, x$ pour $0 < x < \pi/2$, on a $1 < x/\sin x < 1/\cos x$ pour $0 < x < \pi/2$, c'est-à-dire que $\cos x < \sin x/x < 1$ pour $0 < x < \pi/2$. On en tire, le théorème de comparaison pour les limites aidant, la relation cherchée : $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x/x) = 1$.

2) Démontrons la relation $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = \text{e}$. Deux cas sont à considérer.

a) $x \to +\infty$. Désignons par $[x]$ la partie entière du nombre x. Comme $[x] \leqslant x < [x] + 1$, on a

$$(1 + 1/([x] + 1))^{[x]} \leqslant (1 + 1/x)^x \leqslant (1 + 1/[x])^{[x]+1}$$

(nous avons utilisé le fait que les fonctions puissances et exponentielles sont monotones).

Posant $[x] = n$ et se servant de la relation $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = \text{e}$ prouvée plus haut, on obtient la relation cherchée en vertu du théorème de comparaison pour les limites et compte tenu du fait que

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/(n + 1))^n = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^{n+1} = \text{e}.$$

b) $x \to -\infty$. Posons $x = -(1 + t)$. Lorsque $x \to -\infty$, $t \to +\infty$. D'où

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right)^{-(1+t)} =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1 + 1/t)^{-(1+t)}} = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{1+t} = \text{e}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = \text{e}$. La forme plus pratique de cette relation est $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = \text{e}$ (x est remplacé par $1/x$).

La relation considérée a les conséquences suivantes. Cherchons les limites $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$:

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1 + x)^{1/x} =$$
$$= \log_a \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

(nous avons utilisé la continuité de la fonction logarithme) ;

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (1 + t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log_a (1 + t)}{t}} = \ln a,$$
$$t = a^x - 1.$$

Exercices. **1.** Pour tout $k > 0$, démontrer l'existence d'une racine $x(k)$ de l'équation $kx = e^{-x}$ et la continuité de la fonction $x(k)$.

Indication. Introduire la fonction inverse $k = k(x)$. Utiliser le fait qu'elle est monotone et continue ainsi que les propriétés des fonctions inverses.

2. Trouver la limite $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{1/\sin x}$.

Indication. Se servir de la transformation

$$\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{1/\sin x} = \frac{[(1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}]^{1/\cos x}}{(1 + \sin x)^{1/\sin x}}.$$

CHAPITRE 4

CALCUL DIFFÉRENTIEL

§ 1. La dérivée et la différentielle

La notion de limite d'une fonction sert à définir celles de dérivée et de différentielle. Définissons ces notions d'abord pour une fonction d'une variable.

Définition. On appelle *dérivée* d'une fonction $f(x)$ en un point x_0 la limite du rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lorsque $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Autres notations de la dérivée : $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0), x - x_0 = \Delta x$, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Si l'on entend par limite, une limite unilatérale, on est amené à la notion de dérivée à gauche ou à droite au point x_0. Notations :

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0), \qquad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

La notion de différentielle se rattache à celle de dérivée.

Définition. On dit qu'une fonction $f(x)$ est *différentiable* en un point x_0 si son accroissement $\Delta f(x_0)$ correspondant à l'accroissement Δx de la variable indépendante se laisse représenter sous la forme

$$\Delta f(x_0) = A \Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0,$$

où A est une constante. La quantité $A \Delta x$ s'appelle la *différentielle* de la fonction $f(x)$ au point x_0 (notation : $\mathrm{d}f(x_0) = A \Delta x$, $\Delta x = \mathrm{d}x$, i.e. $\mathrm{d}f(x_0) = A\,\mathrm{d}x$).

Le théorème suivant exprime le lien existant entre les notions de dérivée et de différentielle.

Théorème. *Pour qu'une fonction $f(x)$ admette une dérivée en un point x_0 il faut et il suffit qu'elle soit différentiable en ce point.*

☐ *Nécessité.* Supposons que la différentielle $f'(x_0)$ existe. On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

d'où

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \quad (\Delta x \to 0) \text{ ou}$$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ est différentiable au point x_0.

Suffisance. Soit $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$. Alors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

c'est-à-dire que $f'(x_0)$ existe et est égale à A. ■

Une fonction qui admet une dérivée est dite ***différentiable***, et le calcul de la dérivée, ***dérivation*** ou ***différentiation***.

Un lien existe entre les notions de dérivabilité d'une fonction et sa continuité.

Théorème. *Une fonction $f(x)$ différentiable en un point x_0 est continue en ce point.*

☐ Soit $\Delta f(x_0) = A\,\Delta x + o(\Delta x)\,(\Delta x \to 0)$. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = f(x_0) +$$

$$+ A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = f(x_0). \blacksquare$$

Remarques. 1. Puisque $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$, on utilise souvent la notation $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. On dit qu'une fonction $f(x)$ admet en un point x_0 une dérivée infinie égale à $+\infty$ ou $-\infty$ si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ ou } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty.$$

Passons à la notion de dérivée (resp. de différentielle) d'une fonction de plusieurs variables. Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$; $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$; $\Delta_k x = \Delta x$ si toutes les composantes du vecteur Δx vérifient la condition $\Delta x_j = 0$ pour $j \neq k$ ($\Delta_k x$ est l'accroissement partiel de Δx correspondant à l'accroissement Δx_k de la variable d'indice k) ; $\Delta_k f(x) = f(x + \Delta_k x) - f(x)$. Si la limite $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k}$ existe, elle

s'appelle *dérivée partielle* par rapport à la variable x_k de la fonction $f(x)$ au point x. Notation :

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = f_{x_k}(x).$$

La généralisation de la notion de dérivée partielle est celle de dérivée dans une direction ω :

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x + t\omega) - f(x)}{t}, \qquad |\omega| = 1.$$

Si $\omega_j = 0$ pour $j \neq k$, $\omega_k = 1$ et existe la dérivée partielle $f'_{x_k}(x)$, alors $\dfrac{\partial f(x)}{\partial \omega} = f'_{x_k}(x)$. A la notion de dérivée partielle se rattache celle de différentielle totale.

Définition. Soit une fonction $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, définie dans un voisinage du point x. Si son accroissement $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ dans ce voisinage se laisse représenter sous la forme

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k + o(|\Delta x|),$$

où $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$, A_k sont des constantes indépendantes de Δx, on dit que la fonction $f(x)$ est *différentiable* au point x.

La somme $\sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k$ porte le nom de *différentielle totale* de la fonction $f(x)$ et se note $\mathrm{d}f(x)$. Les accroissements Δx_k de la variable indépendante s'appellent différentielles et se notent $\mathrm{d}x_k$. Donc

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k \, dx_k .$$

On montre qu'une fonction $f(x)$ différentiable en un point x est continue en ce point. En effet, on a dans ce cas

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x) + \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] =$$

$$= f(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k + o(|\Delta x|) \right] = f(x),$$

ce que nous voulions.

Indiquons le lien qui existe entre la notion de différentiabilité et celle de dérivée partielle. Soit la fonction $f(x)$ différentiable au point x. Alors $\Delta_k f(x) = A_k \Delta x_k + o(|\Delta x_k|)$. D'où l'on tire l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ et l'égalité $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = A_k$. Ainsi donc

$$df(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx_k .$$

On montre que l'existence de toutes les dérivées partielles en un point donné ne suffit pas pour la différentiabilité de la fonction en ce point.

Exemple. Supposons que $f(x) = 0$ aux points où l'une au moins des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ est nulle et que $f(x) = 1$ ailleurs. Toutes les dérivées partielles existent en $x = 0$, mais la fonction n'est pas dérivable en ce point, puisqu'elle n'y est même pas continue.

On montrera dans la suite que la condition suffisante de dérivabilité d'une fonction $f(x)$ en un point donné est la condition de continuité des dérivées partielles en ce point.

§ 2. Propriétés des dérivées et des différentielles des fonctions d'une variable

Indiquons les propriétés fondamentales de la dérivée des fonctions d'une variable.

Théorème. *Supposons que des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ admettent des dérivées en un point x. Alors les fonctions $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ (c_1, c_2 sont des constantes), $u(x)\, v(x)$ et $\frac{u(x)}{v(x)}$ pour $v(x) \neq 0$ admettent elles aussi des dérivées en ce point et*

1° $[c_1 u(x) + c_2 v(x)]' = c_1 u'(x) + c_2 v'(x)$;

2° $[u(x) v(x)]' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$;

3° $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{v'(x) u(x) - u'(x) v(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0).$

□ L'assertion du théorème découle des propriétés de la limite d'une fonction et de la continuité des fonctions $u(x)$ et $v(x)$. On a

1° $[c_1 u(x) + c_2 v(x)]' =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[c_1 u(x + \Delta x) + c_2 v(x + \Delta x)] - [c_1 u(x) + c_2 v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[c_1 \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + c_2 \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$
$$= c_1 u'(x) + c_2 v'(x) ;$$

$$2^\circ \ [u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$
$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) ;$$

$$3^\circ \ \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right] =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x)v(x + \Delta x)} \frac{v(x)u(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{1}{v^2(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$
$$= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \ \blacksquare$$

Le théorème suivant sur la dérivée d'une fonction composée est d'une grande importance pratique.

Théorème. *Soit une fonction composée $f[\varphi(x)]$; supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée en un point x_0 et la fonction $f(t)$ admet une dérivée en un point $t_0 = \varphi(x_0)$. Alors la fonction $y = f[\varphi(x)]$ admet une dérivée au point x_0 égale à $f'(t_0)\varphi'(x_0)$.*

□ Les fonctions $\varphi(x)$ et $f(t)$ étant différentiables respectivement aux points x_0 et $t_0 = \varphi(x_0)$, on a

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$
$$\Delta f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0).$$

Posons $t = \varphi(x)$, $t_0 = \varphi(x_0)$. Pour $\Delta x \to 0$ on a alors $\Delta t \to 0$, où $\Delta t = t - t_0$. Ensuite

$$f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)] = \Delta f(t_0) = f'(t_0)[\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] +$$
$$+ o[\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] = f'(t_0)\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Il découle de cette relation que la fonction $f[\varphi(x)]$ est différentiable au point x_0 et

$$\{f[\varphi(x)]\}'|_{x=x_0} = f'(t_0)\varphi'(x_0), \text{ où } t_0 = \varphi(x_0). \ \blacksquare$$

Corollaire. *Soit une fonction $x = \varphi(y)$ inverse d'une fonction $y = f(x)$ et supposons que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ admettent des déri-*

vées respectivement aux points x_0 *et* $y_0 = f(x_0)$. *Etablissons une relation entre les dérivées* $f'(x_0)$ *et* $\varphi'(y_0)$. *On a* $x = \varphi[f(x)]$, *d'où* $1 = \varphi'(y_0)f'(x_0)$, et $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

On peut prouver une assertion plus forte.

Théorème. *Supposons qu'une fonction* $y = f(x)$ *est continue, strictement monotone sur l'intervalle* $]a, b[$ *et admet une dérivée* $f'(x_0) \neq 0$ *au point* $x_0 \in]a, b[$. *La fonction inverse* $x = \varphi(y)$ *admet alors au point* $y_0 = f(x_0)$ *une dérivée égale à* $1/f'(x_0)$.

☐ Il s'ensuit de la continuité des fonctions directe et inverse que $\Delta y = \Delta f(x_0) \to 0$ pour $\Delta x \to 0$ et inversement. Comme $\Delta\varphi(y_0) = \Delta x$, on a

$$\frac{\Delta\varphi(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x} = \frac{1}{\Delta f(x_0)/\Delta x},$$

donc l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ pour $f'(x_0) \neq 0$ entraîne celle de la limite $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta\varphi(y_0)}{\Delta y}$ ainsi que l'égalité $\varphi' = (y_0) = 1/f'(x_0)$. ■

Nous nous sommes familiarisés avec quelques règles de calcul des dérivées. Indiquons les formules correspondantes pour les différentielles. Soit $u = u(x)$, $v = v(x)$; alors

$$\mathrm{d}(u + v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

D'après le théorème sur la dérivée d'une fonction composée on a

$$\mathrm{d}f[\varphi(x)] = \{f[\varphi(x)]\}'\,\mathrm{d}x = f'(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $t = \varphi(x)$. La relation obtenue montre que la différentielle et la dérivée d'une fonction composée $y = f(t)|_{t=\varphi(x)}$ sont liées à la différentielle de la variable dépendante $t = \varphi(x)$ de la même façon que dans le cas où t est une variable indépendante. Cette propriété s'appelle *invariance de la forme d'écriture de la différentielle*.

Remarque. Il est commode d'utiliser l'invariance de la forme d'écriture de la différentielle lorsqu'il s'agit de calculer la dérivée d'une fonction donnée paramétriquement. Etant donné que $y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, on a pour $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (t est un paramètre) :

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t, \quad y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

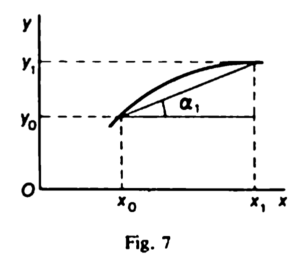


Fig. 7

En conclusion, donnons une interprétation géométrique de la dérivée. Considérons le graphique d'une fonction $y = f(x)$ (fig. 7). Menons par les points (x_0, y_0) $(y_0 = f(x_0))$ et (x_1, y_1) $(y_1 = f(x_1))$ une droite, c'est la sécante passant par ces points. Les points de la sécante de coordonnées (x, y) vérifient l'égalité

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

où α_1 est l'angle que font entre eux la sécante et l'axe Ox. Récrivons cette égalité sous la forme

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

On appelle tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 la droite vers laquelle tend la sécante lorsque $x_1 \to x_0$. On peut montrer qu'une fonction $f(x)$ différentiable en un point x_0 admet une tangente en ce point. En effet, on a dans ce cas

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

de sorte que l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 est de la forme $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dans ce cas

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0),$$

où α est l'angle entre la tangente et l'axe Ox.

§ 3. Dérivées des fonctions élémentaires

Nous avons vu les règles de calcul des dérivées des fonctions d'une variable. Ces mêmes règles permettent de calculer les dérivées de toutes les fonctions élémentaires si sont connues les dérivées des fonctions élémentai-

res les plus simples. Etablissons les formules suivantes :

1. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

2. $(\ln x)' = 1/x$. 3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0)$.

4. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, x \in]-\infty, +\infty[)$.

5. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $(\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x$.

6. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\operatorname{arc\,tg} x)' = -(\operatorname{arc\,cotg} x)' = 1/(1+x^2)$.

7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$, $(\coth x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x$.

□ On a :

1. $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$.

2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{(e^y)'_{y=\ln x}} = \dfrac{1}{e^y|_{y=\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.

3. $(x^\alpha)' = [(e^y)'\, y'(x)]|_{y=\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}\alpha(1/x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

4. $(x^0)' = (1)' = 0$.

Soit $n = 1, 2, \ldots$, alors

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Si $n = -1, -2, \ldots$, alors

$$(x^n)' = (1/x^{-n})' = nx^{-n-1}/x^{-2n} = nx^{n-1}.$$

5. $$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x,$$

puisque $|\cos \Delta x - 1| \leqslant \dfrac{[\Delta x]^2}{2}$ pour $|\Delta x| < \pi$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$. Ensuite, $(\cos x)' = [\sin(\pi/2 - x)]' = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x$.

Pour le calcul des dérivées $(\operatorname{tg} x)'$ et $(\operatorname{cotg} x)'$ on se sert des relations suivantes :

$$\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x, \quad \operatorname{cotg} x = \cos x/\sin x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

6. Les dérivées des fonctions trigonométriques inverses se cherchent à l'aide des expressions pour les dérivées des fonctions trigonométriques correspondantes en utilisant la règle de dérivation des fonctions inverses. Soit,

par exemple, $y = \arcsin x$. Alors $x = \sin y$ et

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On a essentiellement utilisé le fait que $\cos y \geqslant 0$ pour $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

7. Pour trouver les dérivées des fonctions hyperboliques il faut exprimer ces dernières au moyen des fonctions exponentielles e^x et e^{-x}. Par exemple

$$(\operatorname{sh} x)' = [(e^x - e^{-x})/2]' = [(e^x)' - (e^{-x})']/2 = (e^x + e^{-x})/2 = \operatorname{ch} x;$$
$$(\operatorname{ch} x)' = [(e^x + e^{-x})/2]' = [(e^x)' + (e^{-x})']/2 = (e^x - e^{-x})/2 = \operatorname{sh} x. \blacksquare$$

Remarque. Si l'on a à calculer la dérivée d'une fonction qui se laisse représenter sous forme d'un produit de puissances de fonctions élémentaires, il est commode d'utiliser la *dérivée logarithmique*, c'est-à-dire la dérivée du logarithme népérien de la fonction en question. En effet, si $f(x) = [f_1(x)]^{\alpha_1}[f_2(x)]^{\alpha_2} \ldots [f_n(x)]^{\alpha_n}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes, on a

$$\ln f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln f_k(x).$$

Comme $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $[\ln f_k(x)]' = f_k'(x)/f_k(x)$, on a $f'(x)/f(x) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

On aura recours à des dérivées logarithmiques dans le cas aussi où la fonction représente une composée d'une fonction puissance et d'une fonction exponentielle de fonctions élémentaires.

Exemple. Calculer la dérivée de la fonction $y = (x)^{x^2}$.

Nous avons $\ln y = x^2 \ln x$. D'où

$$y'/y = 2x \ln x + x^2/x = (2 \ln x + 1)x,$$

et donc $y' = (2 \ln x + 1)(x)^{x^2+1}$.

§ 4. Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs des fonctions d'une variable

La dérivée d'une fonction d'une variable $y = f(x)$ est une certaine fonction de la variable x. On peut essayer de calculer sa dérivée. La fonction obtenue (si elle existe) s'appelle *dérivée seconde,* ou *dérivée d'ordre*

deux de la fonction $f(x)$. En procédant par récurrence on obtient des dérivées d'ordres supérieurs. Notation :

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Pour certaines fonctions élémentaires on peut déduire des formules générales pour les dérivées d'ordre n. Ainsi, par exemple, on trouve par récurrence

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n},$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n, \ (e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \pi n/2), \ (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \pi n/2).$$

Voici une interprétation physique simple de la dérivée. Si $y = f(x)$ est le chemin parcouru par un point matériel pendant le temps x, la quantité $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ est évidemment la vitesse moyenne du point pendant le temps de x_0 à x. La limite de cette vitesse lorsque $x \to x_0$, c'est-à-dire $f'(x_0)$, est la vitesse instantanée du point à l'instant x_0. Par un raisonnement analogue on s'assure que la dérivée $f''(x_0)$ est l'accélération instantanée du point à l'instant x_0.

Par définition des dérivées d'ordres supérieurs on a les formules suivantes : $[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]^{(n)} = c_1 f_1^{(n)}(x) + c_2 f_2^{(n)}(x)$, c_1, c_2 sont des constantes ;

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x),$$

(C_n^k sont des coefficients binomiaux, $u^{(0)}(x) = u(x)$). Seule la dernière formule, dite *formule de Leibniz,* nécessite une explication. Elle se démontre par récurrence. Pour $n = 1$, la formule a déjà été établie plus haut. Supposons que la formule est vraie pour un n donné et montrons qu'elle le reste pour $n + 1$. Soit donc

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Alors

$$[u(x)v(x)]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)]' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)}(x) v^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k(x) v^{(n+1-k)}(x).$$

Remplaçons dans la première somme k par $k - 1$. Il vient

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)}(x) v^{(n-k)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(k)}(x) v^{(n+1-k)}(x).$$

D'où

$$[u(x)v(x)]^{(n+1)} = u^{(n+1)}(x)v(x) + u(x)v^{(n+1)}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{n} [C_n^{k-1} + C_n^k] u^{(k)}(x) v^{(n+1-k)}(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)}(x) v^{(n+1-k)}(x),$$

puisque $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ et $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. La formule de Leibniz est établie.

Nous avons donc éclairci la notion de dérivées d'ordres supérieurs. Introduisons celle de différentielles d'ordres supérieurs. La différentielle $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ est pour $\mathrm{d}x$ fixe une fonction de la variable x. La différentielle de cette fonction s'appelle différentielle seconde et se note $\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}^2f(x)$. Si $y = f(x)$, on a

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}^2y = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}[f'(x)\mathrm{d}x] = \\ = \mathrm{d}[f'(x)]\mathrm{d}x = f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

On définit par récurrence les différentielles d'ordres supérieurs :

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}[\mathrm{d}^{n-1}y] = f^{(n)}(x)(\mathrm{d}x)^n.$$

Au lieu de $f^{(n)}(x)$ on peut donc écrire $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

La forme de notation des différentielles d'ordres supérieurs n'est pas invariante, seules les différentielles premières présentent cette propriété. Par exemple, $\mathrm{d}^2 f[\varphi(x)] \neq [f(\varphi(x))]''[\mathrm{d}\varphi(x)]^2$.

§ 5. Croissance et décroissance en un point d'une fonction d'une variable. Extrémum local

Appliquons la notion de dérivée à l'étude du comportement d'une fonction. Considérons les valeurs d'une fonction d'une variable $y = f(x)$ dans un δ-voisinage d'un point fixe x. Notons comme auparavant $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Définition. On dit que la fonction $y = f(x)$:

1) est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) au point x si on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que $\Delta y/\Delta x > 0$ (resp. $\Delta y/\Delta x < 0$) pour $0 < |\Delta x| < \delta$, c'est-à-dire que les quantités Δy et Δx sont de même signe (resp. de signes contraires) ;

2) *atteint un maximum* (resp. *un minimum*) *local* au point x si l'on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que $\Delta y \leqslant 0$ (resp. $\Delta y \geqslant 0$) pour $|\Delta x| < \delta$.

Un maximum local aussi bien qu'un minimum local s'appellent *extrémum local.* Notons qu'une fonction ne peut à la fois admettre un extrémum local en un point et y croître ou bien décroître.

Indiquons des critères simples de croissance ou de décroissance d'une fonction et ceux d'un extrémum local.

Théorème. *Si une fonction $f(x)$ admet en un point x une dérivée positive* (resp. *négative*), *elle croît* (resp. *décroît*) *en ce point.*

□ Soit $f'(x) > 0$. On a alors

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0,$$

donc la quantité $\Delta y/\Delta x$ est de même signe que la fonction $f'(x)$ dans un certain δ-voisinage du point x. Dans ce voisinage $\Delta y/\Delta x > 0$, c'est-à-dire que la fonction $y = f(x)$ croît au point x. Mêmes raisonnements dans le cas $f'(x) < 0$. ■

Du théorème précédent découle le **théorème de Fermat** : *si une fonction $f(x)$ atteint en un point x un extrémum local et admet en ce point une dérivée $f'(x)$, alors $f'(x) = 0$.*

En effet, si $f'(x) \neq 0$, la fonction $f(x)$ croît ou décroît au point x et pour cette raison ne peut pas y admettre un extrémum.

Nous avons donc établi que la condition nécessaire d'existence d'un extrémum au point x est l'égalité à zéro de la dérivée $f'(x)$ (à condition, bien sûr, que celle-ci existe). Les conditions suffisantes d'existence d'un extrémum se déduisent à l'aide des théorèmes de la moyenne de la fonction.

Théorème de Rolle. *Soit une fonction $y = f(x)$ continue sur un intervalle $[a, b]$, admettant une dérivée sur l'intervalle $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors sur l'intervalle $]a, b[$ au moins un point c tel que $f'(c) = 0$.*

□ Etant continue sur l'intervalle $[a, b]$, la fonction $y = f(x)$ atteint ses valeurs maximale et minimale en certains points $c_1, c_2 \in [a, b]$. Si les points c_1, c_2 sont situés aux extrémités de l'intervalle, par exemple $c_1 = a$, $c_2 = b$, alors les valeurs maximale et minimale de la fonction $f(x)$ se confondent sur l'intervalle $[a, b]$ en vertu de l'égalité $f(a) = f(b)$. Dans ce cas on a $f(x) \equiv f(a)$ et donc $f'(x) = 0$ pour $x \in]a, b[$.

Supposons maintenant que l'un au moins des points c_1, c_2 ne se confond pas avec les extrémités de l'intervalle $]a, b[$. Supposons, pour fixer les idées, que $c_1 \neq a$ et $c_1 \neq b$. La fonction $f(x)$ admet alors au point c_1 un extrémum local et donc, en vertu du théorème de Fermat, $f'(c_1) = 0$. ■

Théorème de Cauchy de la moyenne. *Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions continues sur un invervalle $[a, b]$ et admettant sur l'intervalle $]a, b[$ des dérivées non simultanément nulles, avec par ailleurs $\varphi(b) \neq \varphi(a)$. Il existe alors sur l'invervalle $]a, b[$ au moins un point c vérifiant l'égalité*

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

□ Considérons une combinaison linéaire des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$: $f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$, en choisissant les constantes A et B (non simultanément nulles) de façon à satisfaire les conditions du théorème de Rolle pour la fonction $f(x) : f(a) = f(b)$, c'est-à-dire que $A[\varphi(b) - \varphi(a)] + B[\psi(b) - \psi(a)] = 0$. On peut, en particulier, poser $B = -1$, $A = [\psi(b) - \psi(a)]/[\varphi(b) - \varphi(a)]$. Il existe alors sur l'intervalle $]a, b[$ un point c tel que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire que $A\varphi'(c) + B\psi'(c) = 0$. Substituant dans cette dernière relation les valeurs choisies pour A et B, on trouve

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = \psi'(c),$$

d'où l'on tire que $\varphi'(c) \neq 0$, puisque dans le cas contraire on aurait $\varphi'(c) = 0$ et $\psi'(c) = 0$, ce qui est impossible par l'hypothèse du théorème. En récrivant la relation ci-dessus sous la forme

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)},$$

on trouve l'assertion du théorème. ■

Corollaire. *Posant $\psi(x) = x$ dans le théorème de Cauchy, on obtient la formule de Lagrange pour les accroissements finis* : $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$, *où* $c \in]a, b[$.

Dans tous les théorèmes que nous venons de considérer, il est commode de représenter le point $c \in]a, b[$ sous la forme $c = a + \theta(b - a)$, où $0 < \theta < 1$.

Voici quelques théorèmes qui découlent de la formule de Lagrange.

Théorème. *Une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle $[a, b]$ et admettant sur l'intervalle $]a, b[$ une dérivée positive* (resp. *strictement positive*) *est croissante* (resp. *strictement croissante*) *sur l'intervalle $[a, b]$.*

□ Soit $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. La formule de Lagrange pour les accroisse-

ments finis donne

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) > 0, \quad x_1 < c < x_2,$$

donc $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Si $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]a, b[$, on a $f'(c) > 0$ et, par conséquent, $f(x_2) > f(x_1)$. ■

En remplaçant dans le théorème précédent $f(x)$ par $-f(x)$, on énonce un théorème analogue : *une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle $[a, b]$ et admettant sur l'intervalle $]a, b[$ une dérivée négative* (resp. *strictement négative*), *est décroissante* (resp. *strictement décroissante*) *sur l'intervalle $[a, b]$*.

Ces deux théorèmes sont vrais non seulement pour un intervalle $[a, b]$, mais aussi pour un intervalle $]a, b[$ (vérifier à titre d'exercice).

Théorème. *Si sur un intervalle $]a, b[$ la dérivée $f(x) = 0$, la fonction $f(x)$ est continue sur cet intervalle.*

□ Soit $a < x_1 < x_2 < b$. La formule de Lagrange nous donne $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0$ $(x_1 < c < x_2)$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ vérifie l'égalité $f(x_2) = f(x_1)$ quels que soient $x_1, x_2 \in$ $\in]a, b[$. ■

La formule de Lagrange permet aussi de formuler les conditions suffisantes d'un extrémum local.

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction continue dans un certain voisinage d'un point x_0 et admettant dans ce voisinage une dérivée telle que* $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) *pour $x > x_0$*, $f'(x) \leqslant 0$ (resp. $f'(x) \geqslant 0$) *pour $x < x_0$. La fonction $f(x)$* admet alors au point x_0 *un minimum* (resp. *un maximum*) *local.*

□ En vertu de la formule de Lagrange, on a dans le voisinage considéré du point x_0 :

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in]x, x_0[,$$

d'où, vu les hypothèses du théorème, on a aussi bien pour $x > x_0$ que pour $x < x_0$: $f'(c)(x - x_0) \geqslant 0$ (resp. $f'(c)(x - x_0) \leqslant 0$), c'est-à-dire que $f(x) \geqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \leqslant f(x_0)$). Ce qui signifie que la fonction $f(x)$ admet au point x_0 un minimum (resp. un maximum) local. ■

On peut relâcher les restrictions du théorème si l'on admet l'existence de la dérivée seconde.

Théorème. *Supposons qu'une fonction $f(x)$ admet la dérivée $f'(x)$ au voisinage d'un point x_0 et la dérivée seconde $f''(x)$ au point x_0. Si* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), *alors le point x_0 est un point de minimum* (resp. *de maximum*) *local de la fonction $f(x)$.*

□ La continuité de la fonction $f(x)$ dans le voisinage considéré du point x_0 découle de l'existence dans ce voisinage de la dérivée $f'(x)$.

Montrons que toutes les conditions du théorème précédent sont remplies. Comme $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), la fonction $f'(x)$ croît (resp. décroît) au point x_0. En outre, $f'(x_0) = 0$, donc dans un certain voisinage du point x_0 on a $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour $x > x_0$ et $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) pour $x < x_0$. Il s'ensuit donc du théorème précédent que pour $x = x_0$ la fonction $f(x)$ admet un minimum (resp. un maximum) local. ■

Signalons en conclusion quelques propriétés de la dérivée qu'on déduit de la formule de Lagrange des accroissements finis et du théorème de Fermat.

Théorème. *Supposons qu'une fonction $f(x)$ admet en un point donné une limite de la dérivée à gauche $f'_-(x) = \lim_{\xi \to x - 0} f'(\xi)$ (ou une limite de la dérivée à droite $f'_+(x) = \lim_{\xi \to x + 0} f'(\xi)$) et, en outre, la dérivée $f'(x)$ existe en ce point. Alors $f'_-(x) = f'(x)$ (resp. $f'_+(x) = f'(x)$).*

□ Supposons que la valeur $f'_-(x)$ existe. Alors, pour $0 < x - t < \varepsilon$ et un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a d'après la formule de Lagrange des accroissements finis $f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t)$, où $t < \xi < x$. D'où $\dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(\xi)$. Soit $t \to x$, $t < x$. On a alors $\lim_{t \to x} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(x)$. D'autre part, pour $t \to x$ on aura $\xi \to x - 0$, d'où $\lim_{t \to x} f'(x) = f'_-(x)$ et donc $f'_-(x) = f'(x)$. De façon analogue, on montre que $f'_+(x) = f'(x)$ si $f'_+(x)$ existe. ■

Il découle de ce théorème que la dérivée $f'(x)$ ne peut admettre ni de points de discontinuité de première espèce, ni de discontinuités non essentielles.

Montrons maintenant que si une fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ il existe toujours un point en lequel la dérivée prend la valeur donnée λ comprise entre les valeurs $f'(a)$ et $f'(b)$. La fonction $f'(x)$ n'est pas supposée être continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Théorème. *Supposons qu'une fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ sur un intervalle fermé $[a, b]$ et $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (ou $f'(a) > \lambda > f'(b)$). Il existe alors sur l'intervalle $]a, b[$ un point ξ tel que $f'(\xi) = \lambda$.*

□ Considérons la fonction $g(x) = f(x) - \lambda x$ et supposons que

$f'(a) < \lambda < f'(b)$. Alors

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \quad g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$$

et la fonction $g(x)$ ne peut prendre sa valeur minimale sur l'intervalle $[a, b]$ qu'en un point $\xi \in]a, b[$. D'après le théorème de Fermat, $g'(\xi) = 0$, c'est-à-dire que $f'(\xi) = \lambda$, ce que nous voulions. Le cas où $f'(a) > \lambda > f'(b)$ se traite de façon analogue. ■

Exemple. Cherchons les points d'extrémum local de la fonction $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$, $\alpha > 0, \beta > 0, x > 0$. Comme $f'(x) = x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(\alpha - \beta x)$, alors $f'(x) = 0$ pour $x = \alpha/\beta$; $f'(x) > 0$ pour $x < \alpha/\beta$; $f'(x) < 0$ pour $x > \alpha/\beta$. Par conséquent, le point $x = \alpha/\beta$ est un point de maximum de la fonction $f(x) = x^\alpha e^{-\beta x}$.

§ 6. Conditions de dérivabilité d'une fonction de plusieurs variables. Dérivation d'une fonction composée

La formule de Lagrange des accroissements finis pour une fonction d'une variable permet de formuler les conditions suffisantes de dérivabilité de la fonction $f(x)$ de plusieurs variables.

Théorème. *Si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ *sont définies dans un certain voisinage d'un point x et sont continues en ce point même, alors la fonction $f(x)$ est dérivable en x.*

□ Ecrivons l'accroissement de la fonction $f(x)$ sous la forme d'une somme d'accroissements exprimant chacun la variation d'une seule variable :

$$\Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Introduisons les notations :

$$f_k(x) = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{k-1} + \Delta x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m),$$
$$f_1(x) = f(x_1, \ldots, x_m), f_{m+1}(x) = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m).$$

On a alors

$$\Delta f(x) = f_{m+1}(x) - f_1(x) =$$
$$= [f_{m+1}(x) - f_m(x)] + [f_m(x) - f_{m-1}(x)] + \ldots + [f_2(x) - f_1(x)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [f_{k+1}(x) - f_k(x)].$$

Nous pouvons appliquer à chaque terme de la somme la formule des accroissements finis, puisqu'en passant de $f_k(x)$ à $f_{k+1}(x)$ seule change la valeur de la variable x_k. On a

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) =$$
$$= f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{k-1} + \Delta x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) -$$
$$-f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{k-1} + \Delta x_{k-1}, x_k, \ldots, x_m) =$$
$$= \frac{\partial f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{k-1} + \Delta x_{k-1}, \tilde{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)}{\partial x_k} \Delta x_k,$$

où $\tilde{x}_k \in (x_k, x_k + \Delta x_k)$. D'une façon analogue, on a pour $k = 1$ et $k = m$

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{\partial f(\tilde{x}_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1} \Delta x_1,$$

$$f_{m+1}(x) - f_m(x) = \frac{\partial f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{m-1} + \Delta x_{m-1}, \tilde{x}_m)}{\partial x_m} \Delta x_m.$$

Au voisinage du point considéré x les dérivées partielles $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ sont continues, donc pour $|\Delta x| \to 0$ on a

$$\frac{\partial f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{k-1} + \Delta x_{k-1}, \tilde{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + o(1).$$

Ainsi donc, $f_{k+1}(x) - f_k(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Delta x_k + o(|\Delta x|)$ et

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Delta x_k + o(|\Delta x|). \blacksquare$$

Des théorèmes que nous venons de considérer il découle que pour qu'une fonction $f(x)$ soit dérivable en un point x il faut qu'elle admette en ce point des dérivées partielles, et il suffit que les dérivées partielles existent dans un certain voisinage de ce point et soient continues au point x.

L'expression de la différentielle de la fonction $f(x)$

$$df(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k$$

est le produit scalaire des vecteurs $\nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$ et $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$, c'est-à-dire que $df(x) = \nabla f(x) \Delta x$.

Le vecteur $\nabla f(x)$ porte le nom de *gradient de la fonction* $f(x)$ et se note parfois grad $f(x)$ (∇ se lit « nabla »).

La notion de gradient facilite une notation condensée de la dérivée suivant une direction $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, où $|\omega| = 1$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x + t\omega) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0+0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} t\omega_k + o(|t\omega|)}{t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \omega_k = \nabla f(x)\omega.$$

La dérivée suivant une direction jouit de la propriété suivante : $\left|\frac{\partial f}{\partial \omega}\right| \leqslant$ $\leqslant |\nabla f(x)|$. Pour prouver ce fait, servons-nous de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky pour le produit scalaire de vecteurs

$$|\nabla f(x)\omega| \leqslant |\nabla f(x)| \cdot |\omega| = |\nabla f(x)|.$$

On a par ailleurs $\partial f/\partial \omega = |\nabla f(x)|$ si $\omega = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$. On voit donc que le module de la dérivée suivant une direction ω n'est pas supérieur au module du gradient de la fonction, la dérivée suivant la direction ω admettant sa plus grande valeur (positive) dans le cas où le vecteur ω est dirigé suivant le gradient de la fonction $f(x)$ (c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ croît le plus vite dans la direction de son gradient).

Passons à la question de la dérivabilité des fonctions composées de plusieurs variables. Soit $f(\varphi(x)) = f(t)|_{t=\varphi(x)}$, où $x = (x_1, \dots, x_m)$, $t =$ $= (t_1, \dots, t_l)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_l(x))$.

Théorème. *Soient deux fonctions $\varphi_k(x)$, $k = 1, \dots, l$, et $f(t)$ dérivables aux points $x = a$ et $t = b = \varphi(a)$ respectivement, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_l)$. Alors la fonction composée $F(x) = f(\varphi(x))$ est dérivable au point $x = a$.*

□ Les fonctions $\varphi_k(x)$ et $f(t)$ étant dérivables aux points $x = a$ et $t = b$ respectivement, on a

$$\Delta\varphi_k(a) = \varphi_k(x) - \varphi_k(a) = \sum_{p=1}^{m} \left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p}\right|_{x=a} \Delta x_p + o(|\Delta x|),\ |\Delta x| \to 0,$$

$$\Delta f(b) = f(t) - f(b) = \sum_{k=1}^{l} \left.\frac{\partial f}{\partial t_k}\right|_{t=b} \Delta t_k + o(|\Delta t|),\ |\Delta t| \to 0,$$

$$\Delta x = x - a,\ \Delta t = t - b,\ \Delta x_p = x_p - a_p,\ \Delta t_k = t_k - b_k.$$

Posant $t_k = \varphi_k(x)$ pour la fonction composée $F(x) = f(\varphi(x))$, on trouve

$$\Delta F(a) = F(x) - F(a) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(a)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial t_k}\bigg|_{t=b} \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p}\bigg|_{x=a} \Delta x_p + o(|\Delta x|), \quad |\Delta x| \to 0.$$

Nous avons essentiellement utilisé le fait que $\Delta t_k = \Delta\varphi_k(a) = O(|\Delta x|)$, $|\Delta x| \to 0$ pour $t_k = \varphi_k(x)$. Remarquons que dans l'accroissement de la fonction composée $f(\varphi(x))$, nous avons mis en évidence la partie linéaire en accroissements Δx_p, et le résidu estimé comme $o(|\Delta x|)$. Ceci montre précisément que la fonction composée $f(\varphi(x))$ est dérivable au point $x = a$. ■

Au cours de la démonstration du théorème pour la fonction composée $f(\varphi(x))$ nous avons obtenu la relation suivante :

$$\mathrm{d}f(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_p}\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)} \mathrm{d}x_p = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \mathrm{d}t_k \big|_{t_k=\varphi_k(x)}$$

et donc

$$\mathrm{d}f(\varphi(x)) = \mathrm{d}f(t)\big|_{t_k=\varphi_k(x)} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \mathrm{d}t_k \big|_{t_k=\varphi_k(x)}.$$

Nous voyons que la forme d'écriture de la différentielle $\mathrm{d}f(t)$ est invariante, les variables t_k pouvant être aussi bien indépendantes que des fonctions des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. En outre, on tire de l'expression de la différentielle de la fonction composée la règle pratique suivante de calcul de ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_p}\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)}.$$

On a, en particulier, pour $m = 1$

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \frac{dt_k}{dx}\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)}.$$

Cette dernière expression permet de généraliser la formule de Lagrange des accroissements finis au cas d'une fonction de plusieurs variables. Soient $\bar{x}$ et $\tilde{x}$ deux points choisis dans le domaine de définition de la fonction $f(x)$. Supposons que tous les points de la forme $x(t) = \bar{x} + t(\tilde{x} - \bar{x})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, appartiennent au domaine de définition de $f(x)$. Considérons une fonction d'une variable : $\varphi(t) = f(x(t))$. Nous avons $\varphi(0) = f(\bar{x})$, $\varphi(1) = f(\tilde{x})$. Si la fonction $f(x)$ est dérivable en tous les points de la forme $x = x(t)$, alors la fonction $\varphi(t)$ est dérivable dans l'intervalle $]0, 1[$ et

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=x(t)} \Delta x_k, \quad \Delta x_k = \tilde{x}_k - \bar{x}_k.$$

La formule de Lagrange des accroissements finis nous donne $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t)$, $0 < t < 1$. Ainsi donc

$$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=x(t)} \Delta x_k, \quad 0 < t < 1.$$

Nous avons supposé que les points de la forme $x = x(t)$ appartiennent au domaine de définition de la fonction $f(x)$. On dit qu'un ensemble A est *convexe* si l'appartenance à A de deux points quelconques $\bar{x}$, $\tilde{x}$ entraîne l'appartenance à cet ensemble de tous les points de la forme $x(t) = \bar{x} + t(\tilde{x} - \bar{x})$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Un exemple d'un ensemble convexe ouvert est fourni par un ε-voisinage du point a. En effet, supposons que l'ensemble A est composé des points x tels que $|x - a| < \varepsilon$, et soient $\bar{x}$, $\tilde{x}$ des points de cet ensemble. Posons $x(t) = \bar{x} + t(\tilde{x} - \bar{x})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Dans ce cas $x(t) - a = (1 - t)(\bar{x} - a) + t(\tilde{x} - a)$, d'où

$$|x(t) - a| \leqslant (1 - t)|\bar{x} - a| + t|\tilde{x} - a| < (1 - t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi donc, tous les points $x(t)$ appartiennent à l'ε-voisinage du point a, ce qu'il fallait démontrer.

D'une façon analogue, on montre qu'un ε-voisinage fermé du point a, c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $|x - a| \leqslant \varepsilon$, est un ensemble convexe fermé.

On voit que pour toute fonction $f(x)$ différentiable sur un ensemble convexe A on a la formule de Lagrange des accroissements finis

$$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=x(t)} \Delta x_k,$$
$$x(t) = \bar{x} + t(\tilde{x} - \bar{x}), \quad 0 < t < 1.$$

Tout comme dans le cas d'une fonction d'une variable, on montre à l'aide de la formule de Lagrange qu'une fonction $f(x)$ différentiable sur un ensemble convexe et vérifiant les conditions $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = 0$ a une valeur constante.

Notons en conclusion que la formule déduite plus haut pour les dérivées partielles d'une fonction composée est valable pour des hypothèses moins restrictives que celles qui ont été admises pour sa déduction. En effet, dans la définition de la dérivée partielle de la fonction $f(\varphi(x))$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_l(x))$ par rapport à la variable x_p, les valeurs de toutes les variables $x_1, \ldots, x_m$, sauf x_p sont fixées, donc pour l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_p}$ il suffit que soient dérivables les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x)$ par rapport à la variable x_p pour des valeurs fixées des autres variables $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m$ et que soit dérivable la fonction $f(t) = f(t_1, \ldots, t_l)$ par rapport à celles des variables $t_1 = \varphi_1(x)$, $t_2 = \varphi_2(x), \ldots, t_l = \varphi_l(x)$ qui sont effectivement fonctions de x_p. Ces exigences sont en particulier satisfaites si l'on demande que dans le point considéré les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_p}$ existent et les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t_k}$ soient continues pour k tels que les fonctions $t_k = \varphi_k(x)$ dépendent de x_p.

§ 7. Dérivées partielles et différentielles d'ordres supérieurs d'une fonction de plusieurs variables. Indépendance par rapport à l'ordre de dérivation

Les dérivées partielles $\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, sont des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Il est donc légitime de considérer les dérivées partielles de ces fonctions, ce qui nous amène à la notion de dérivées partielles d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}\right).$$

On définit de même les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Il se trouve que, pour des conditions assez générales, les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_l}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_l \partial x_k}$ se confondent. Considérons tout d'abord les fonctions de deux variables.

Théorème. *Supposons qu'une fonction* $z = f(x, y)$ *admet au voisinage d'un point* (x_0, y_0) *les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ *qui soient continues en ce point. Alors* $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ *pour* $x = x_0, y = y_0$.

□ Considérons le carré $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + h$. Pour h suffisamment petit, il est intérieur au voisinage dans lequel existent les dérivées $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ et donc les dérivées $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ (les points du carré vérifient l'inégalité $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqslant h\sqrt{2}$). Posons $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$, $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. On montre que

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0).$$

En effet,

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0),$$

$$\psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

Servons-nous de la formule de Lagrange :

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(c_1)h, \quad c_1 \in]x_0, x_0 + h[;$$

$$\psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = \psi'(c_2)h, \quad c_2 \in]y_0, y_0 + h[.$$

Mais

$$\varphi'(c_1) = \frac{\partial f(c_1, y_0 + h)}{\partial x} - \frac{\partial f(c_1, y_0)}{\partial x},$$

$$\psi'(c_2) = \frac{\partial f(x_0 + h, c_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, c_2)}{\partial y}.$$

Transformons les expressions de $\varphi'(c_1)$ et $\psi'(c_2)$ à l'aide de la formule de Lagrange. On a

$$\varphi'(c_1) = \frac{\partial^2 f(c_1, \tilde{c}_2)}{\partial y \partial x} h, \quad \tilde{c}_2 \in]y_0, y_0 + h[;$$

$$\psi'(c_2) = \frac{\partial^2 f(\tilde{c}_1, c_2)}{\partial x \partial y} h, \quad \tilde{c}_1 \in]x_0, x_0 + h[.$$

Donc

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \frac{\partial^2 f(c_1, \tilde{c}_2)}{\partial y \partial x} h^2,$$

$$\psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = \frac{\partial^2 f(\tilde{c}_1, c_2)}{\partial x \partial y} h^2.$$

D'où $\frac{\partial^2 f(c_1, \tilde{c}_2)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(\tilde{c}_1, c_2)}{\partial x \partial y}$. Passons dans cette dernière égalité à la limite pour $h \to 0$. Comme pour $h \to 0$ on a $c_1 \to x_0$, $\tilde{c}_1 \to x_0$, $c_2 \to y_0$, $\tilde{c}_2 \to y_0$, alors on obtient à la limite la relation $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$. ■

On a un théorème plus général pour la fonction de plusieurs variables.

Théorème. *Si toutes les dérivées partielles d'ordre n d'une fonction $f(x)$ existent dans un voisinage d'un point x_0 et sont continues en ce point, aucune d'elles ne change de valeur pour $x = x_0$ si l'on intervertit l'ordre de dérivation.*

La démonstration du théorème est très volumineuse dans le cas général et se fait par récurrence. A chaque étape des raisonnements, on intervertit l'ordre de dérivation par rapport à deux variables en vertu du théorème précédent.

Montrons par exemple que

$$\frac{\partial^4 f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^4 f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right] = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3^2}.$$

Considérons maintenant la notion de différentielles d'ordres supérieurs d'une fonction de plusieurs variables. Celles-ci se définissent par récurrence. Supposons que la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est définie par différentielles $\mathrm{d}x_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, des variables indépendantes. Pour des $\mathrm{d}x_k$ fixes, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et donc il existe une différentielle d'ordre deux :

$$\mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(x)) = \mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_l \partial x_k}\,\mathrm{d}x_l\,\mathrm{d}x_k.$$

Mêmes raisonnements pour les différentielles d'ordres supérieurs. On a

$$\mathrm{d}^n f(x) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_n}} \mathrm{d}x_{k_1} \mathrm{d}x_{k_2} \dots \mathrm{d}x_{k_n}.$$

Dans cette somme chacun des indices k_i parcourt les valeurs de 1 à m. Pour le calcul des dérivées, on peut changer l'ordre de dérivation, par suite la somme contient beaucoup de termes identiques.

Exercice. Déterminer les différentielles première et seconde de la fonction $z = x^y$.

§ 8. Formule de Taylor

Si une fonction $f(x)$ d'une variable est différentiable en un point $x = a$, on a dans un voisinage de ce point le développement

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad x \to a.$$

Précisons-le en développant la fonction $f(x)$ suivant les puissances de $(x - a)$ et en tronquant le développement au niveau de n. Pour nous en faire une idée, considérons tout d'abord le cas où la fonction $f(x)$ est un polynôme de degré n : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ (α_k sont des constantes). Pour développer ce polynôme suivant les puissances de $(x - a)$ il suffit de développer suivant ces puissances chaque fonction x^k :

$$x^k = [(x - a) + a]^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (x - a)^p a^{k-p}.$$

En réduisant les termes semblables dans l'expression du polynôme $f(x)$, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x - a)^k.$$

Les coefficients β_k s'expriment facilement à l'aide des dérivées $f^{(k)}(a)$ si l'on se sert de la relation

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} [(x - a)^k] \Big|_{x=a} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq l, \\ l\,! & \text{pour } k = l. \end{cases}$$

On a $f^{(l)}(a) = \beta_l l\,!$, $l = 0, 1, \dots, n$, d'où $\beta_l = f^{(l)}(a)/l\,!$. Par conséquent, le développement d'un polynôme arbitraire $f(x)$ de degré n suivant les puissances de $(x - a)$ se présente sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad f^{(0)}(x) = f(x), \quad (x-a)^0 = 1.$$

Si la fonction $f(x)$ n'est pas un polynôme de degré n, le développement en question est alors de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

où la fonction $R_n(x)$ n'est pas identiquement nulle. Cette représentation d'une fonction arbitraire $f(x)$ s'appelle *formule de Taylor*, et la fonction $R_n(x)$, son *reste* (pour $a = 0$, la formule de Taylor porte le nom de *formule de Maclaurin*). Le développement d'une fonction $f(x)$ en série de Taylor au voisinage d'un point $x = a$ n'est justifié que si l'on peut négliger le reste $R_n(x)$ pour des $(x - a)$ suffisamment petits, étant donné que la fonction $R_n(x)$ n'est pas plus simple que la fonction $f(x)$. Montrons que la fonction $R_n(x)$ est effectivement négligeable si au voisinage du point a la fonction $f(x)$ admet une dérivée d'ordre $n + 1$.

Théorème. *Supposons que la fonction $f(x)$ admet une dérivée d'ordre $n + 1$ au voisinage du point a. Le reste $R_n(x)$ de la formule de Taylor admet alors, au voisinage de ce point, la représentation suivante* :

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n-p+1}}{n!p}(x-a)^p f^{(n+1)}(c),$$

où $p > 0$, $c \in]a, x[$.

□ Evaluons le terme $R_n(x)$ en un point $x = x_0$ fixe appartenant au voisinage du point a dans lequel la fonction $f(x)$ admet la dérivée d'ordre $n + 1$. Considérons la fonction auxiliaire

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x_0 - t)^k + \left(\frac{x_0 - t}{x_0 - a}\right)^p R_n(x_0),$$

où $R_n(x_0)$ est le reste de la formule de Taylor, $p > 0$. La fonction $\Phi(t)$ est choisie de façon à satisfaire aux égalités $\Phi(a) = f(x_0)$, $\Phi(x_0) = f(x_0)$, c'est-à-dire que $\Phi(a) = \Phi(x_0)$. En effet,

$$\Phi(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x_0 - a)^k + R_n(x_0) = f(x_0),$$

$$\Phi(x_0) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} = f(x_0)$$

(on a utilisé les égalités $(x_0 - t)^k|_{t=x_0} = 0$ pour $k > 0$, $0\,! = 1$, $(x_0 - t)^0 = 1$, $f^{(0)}(t) = f(t)$). Il est aisé de vérifier que la fonction $\Phi(t)$ satisfait sur l'intervalle fermé $[a, x_0]$ les conditions du théorème de Rolle. En effet, la fonction $\Phi(t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, x_0]$, admet une dérivée sur l'intervalle ouvert $]a, x_0[$ et $\Phi(a) = \Phi(x_0)$. Il doit donc exister un point c en lequel $\Phi'(c) = 0$. D'autre part,

$$\Phi'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x_0 - t)^k -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!}(x_0 - t)^{k-1} - p\left(\frac{x_0 - t}{x_0 - a}\right)^{p-1} \frac{1}{(x_0 - a)} R_n(x_0).$$

Changeons dans la seconde somme l'indice de sommation k en $k + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)\,!}(x_0 - t)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k\,!}(x_0 - t)^k.$$

D'où

$$\Phi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!}(x_0 - t)^n - p\left(\frac{x_0 - t}{x_0 - a}\right)^{p-1} \frac{1}{(x_0 - a)} R_n(x_0).$$

Le fait que $\Phi'(c) = 0$, $c \in\,]a, x_0[$, permet d'écrire

$$R_n(x_0) = \frac{(x_0 - c)^{n-p+1}}{n\,!p}(x_0 - a)^p f^{(n+1)}(c).$$

C.Q.F.D. ■

Si dans la représentation du reste $R_n(x)$ on pose $p = 1$, on obtient sa représentation de Cauchy :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - c)^n (x - a)}{n\,!}, \quad c \in\,]a, x[.$$

En posant $p = n + 1$, on obtient la représentation de Lagrange :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}(x - a)^{n+1}, \quad c \in\,]a, x[.$$

Evaluons le reste $R_n(x)$ dans la formule de Taylor pour des restrictions moins fortes qu'auparavant, plus exactement, supposons que la fonction $f(x)$ admet au point $x = a$ une dérivée continue d'ordre n. Ecrivons la formule de Taylor, en représentant le reste sous la forme de Lagrange et en

changeant n en $n - 1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n\,!}(x-a)^n, \qquad c \in]a, x[.$$

La fonction $f^{(n)}(x)$ étant continue au point $x = a$, on a $\lim\limits_{x \to a} f^{(n)}(c) =$ $= f^{(n)}(a)$, c.-à-d. que $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + o(1), x \to a$.

D'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + o[(x-a)^n], \quad x \to a.$$

On s'est servi ici de la relation $(x-a)^n \cdot o(1) = o[(x-a)^n], x \to a$.

L'écriture du reste $R_n(x)$ de la formule de Taylor sous la forme $R_n(x) = o[(x-a)^n], x \to a$, s'appelle *représentation de Peano.*

Remarque. Si la fonction $f(x)$ est une fonction paire (resp. impaire), i.e. $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$), sa dérivée est une fonction impaire (resp. paire), puisque $f'(-x) = -f'(x)$ (resp. $f'(-x) = f'(x)$). Pour cette raison la formule de Taylor contient pour $a = 0$ pour une fonction paire (resp. impaire) uniquement des puissances paires (resp. impaires) de x, les fonctions impaires étant nulles pour $x = 0$.

Exemple. L'égalité $1 + x^2 + \ldots + x^{2m} = (1 - x^{2m+2})/(1 - x^2)$ donne lieu à

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2m} + o(x^{2m}), \qquad x \to 0.$$

C'est la formule de Taylor avec reste de Peano.

On peut écrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange sous la forme symétrique en utilisant les différentielles de la fonction $f(x)$ correspondant à la valeur donnée $\mathrm{d}x$ de la différentielle de la variable indépendante. Soit $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$, $\mathrm{d}x = x - a$; on a

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^{(k)} f(a)}{k\,!} + \frac{\mathrm{d}^{(n+1)} f(c)}{(n+1)\,!}.$$

Généralisons la formule de Taylor à une fonction de plusieurs variables. Soit une fonction $y = f(x), x = (x_1, \ldots, x_m)$, définie sur un ensemble convexe A et admettant sur cet ensemble des dérivées partielles continues d'ordre $n + 1$. Supposons ensuite que les points x_0 et x appartiennent à

l'ensemble A. Alors les points $x(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, lui appartiennent aussi. Considérons la fonction $\varphi(t) = f[x(t)]$. La règle de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f[x(t)]}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{0,i},$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f[x(t)]}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j,$$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f[x(t)]}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \Delta x_{i_2} \ldots \Delta x_{i_k}.$$

La fonction $f(x)$ admet au voisinage du point considéré x des dérivées partielles continues d'ordre $n + 1$. Par conséquent, la fonction $\varphi(t)$ admet au voisinage du point $t = 0$ des dérivées continues d'ordre $n + 1$. Développons la fonction $\varphi(t)$ en une série de Taylor-Maclaurin avec reste de Lagrange :

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k\,!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{(n + 1)\,!},$$

où $0 < t < 1$. Comme $\varphi(1) = f(x)$ et $\varphi(0) = f(x_0)$, on a en définitive

$$f(x) = f(x_0) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,!} \left[\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} \right] + R_n(x),$$

où

$$R_n = \frac{1}{(n + 1)\,!} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{m} \frac{\partial^{n+1} f[x(t)]}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n+1}}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_{n+1}},$$

$$x(t) = x_0 + t(x - x_0), \quad 0 < t < 1.$$

Récrivons la formule de Taylor sous une forme différente. Soit $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$; alors

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{k\,!} + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f[x(t)]}{(n + 1)\,!},$$

où $x(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $0 < t < 1$. En remplaçant n par $n - 1$ dans la formule de Taylor avec reste de Lagrange et en procédant comme dans le cas de fonctions d'une variable, on obtient la formule de Taylor avec reste de Peano :

$$f(x) = f(x_0) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} \right] + R_n(x),$$

où $R_n(x) = o(|\Delta x|^n)$, $|\Delta x| \to 0$. Pour $n = 2$ la formule de Taylor s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + R_2(x).$$

§ 9. Séries de Taylor

Supposons que dans la formule de Taylor pour une fonction d'une variable on a $n \to \infty$ et $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

La série du second membre de cette égalité porte le nom de *série de Taylor*. Il est évident que la condition $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ assure la convergence de la série de Taylor et l'égalité de sa somme à la fonction $f(x)$. Par contre, la condition de convergence de la série de Taylor n'implique pas toujours l'égalité de sa somme à la fonction $f(x)$.

Exemple. Considérons la série de Taylor de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Nous avons $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2}$, ..., $f^{(k)}(x) = p_k(1/x)e^{-1/x^2}$, où $p_k(x)$ est un polynôme. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = 0$ pour tout k, on a $f^{(k)}(0) = 0$ et la série de Taylor con-

verge vers 0 pour tout x. De toute évidence, sa somme n'est pas égale à la fonction $f(x)$.

Cernons le domaine de convergence de la série de Taylor. Remarquons tout d'abord que cette série est une série entière, ou série de puissances, c'est-à-dire une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k$. Comme montré pp. 49-50, la série converge absolument pour $|x - a| < R$, où $R = 1/\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. La quantité R s'appelle *rayon de convergence de la série entière* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k$. Si $a_k \neq 0$ pour tous $k = 0, 1, \ldots$ et existe $\lim_{k \to \infty} |a_{k+1}/a_k| = A$, on a $R = 1/A$.

Considérons les séries de Taylor de quelques fonctions élémentaires pour $a = 0$.

1. Soit $f(x) = (1 + x)^\alpha$. Comme $f(0) = 1$ et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1), \ldots$ $\ldots, (\alpha - k + 1)$, la série de Taylor s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ pour $a_0 = 1, a_k = [\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)]/k!$, $k \geqslant 1$. Comme $\lim_{k \to \infty} |a_{k+1}/a_k| = 1$, on a $R = 1$.

Cherchons la majoration du reste de la formule de Taylor pour $|x| < 1$. A cet effet, représentons-le sous la forme de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)}{n!} (1 + c)^{\alpha - 1} x \left(\frac{x - c}{1 + c}\right)^n, \quad c \in]0, x[.$$

Montrons que pour $|x| < 1$ on a l'inégalité $|(x - c)/(1 + c)| \leqslant |x|$. En effet,

$$\left|\frac{x - c}{1 + c}\right| = \frac{|x| - |c|}{|1 + c|} \leqslant \frac{|x| - |c|}{1 - |c|} \leqslant |x|.$$

On a utilisé le fait que les nombres x et c sont de même signe et $|c| < |x|$. Comme, en outre, $|(1 + c)^{\alpha - 1}| \leqslant \max [(1 + x)^{\alpha - 1}, 1]$ on a pour $R_n(x)$ la majoration suivante :

$$|R_n(x)| \leqslant \max [(1 + x)^{\alpha - 1}, 1] |x|^{n+1} (n + 1) |a_{n+1}|.$$

Pour $|x| < 1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)|a_{n+1}| |x|^{n+1}$ converge en vertu du critère de D'Alembert ; par conséquent, $\lim_{n \to \infty} (n + 1)|a_{n+1}| |x|^{n+1} = 0$ en

vertu du critère de convergence des séries. On en tire que $R_n \to 0$ pour $n \to \infty$, c'est-à-dire que pour $|x| < 1$ on a le développement en série de Taylor :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k\,!} x^k.$$

2. Soit $f(x) = \ln (1 + x)$. Alors on a pour $k \geqslant 1$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k - 1)\,!}{(1 + x)^k}.$$

En étudiant la formule et la série de Taylor comme dans le cas de la fonction $f(x) = (1 + x)^\alpha$, on obtient en définitive pour $|x| < 1$

$$\ln (1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

3. Soit $f(x) = e^x$. Alors $f^{(k)}(x) = e^x$. La série de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,!}$$

converge (en vertu du critère de D'Alembert) pour tout x.

Pour majorer le reste de la formule de Taylor, représentons-le sous la forme de Lagrange :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)\,!} e^c, \quad c \in]0, x[.$$

D'où

$$|R_n(x)| \leqslant A(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)\,!}, \quad \text{où} \quad A = \max (1, e^x).$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} A(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)\,!}$ converge en vertu du critère de D'Alembert pour tout x ; par conséquent, $R_n(x) \to 0$ pour $n \to \infty$, c'est-à-dire que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,!}.$$

4. La convergence de la série de Taylor des fonctions $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ s'établit de la même façon que dans le cas de la fonction e^x. Pour majorer le reste $R_n(x)$ on se servira des inégalités $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$. En définitive, on obtient pour tout x

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercices. **1.** Combien de termes faut-il retenir de la série $e^2 = 1 + 2 + 2^2/2! + 2^3/3! + \ldots$ pour calculer e^2 à 10^{-3} près ?

2. Développer la fonction $y = x/(e^x - 1)$ suivant les puissances de x à $o(x^3)$ près lorsque $x \to 0$.

§ 10. Fonctions à valeurs complexes et fonctions vectorielles

Soient deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ définies sur un ensemble numérique A. Associer à chaque $x \in A$ un nombre complexe $y = u(x) + iv(x)$ équivaut à définir sur A une fonction $y = f(x) = u(x) + iv(x)$ à valeurs complexes. Les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ s'appellent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $f(x)$. La notion de module d'un nombre complexe permet de généraliser aux fonctions à valeurs complexes les notions de limite et de continuité introduites plus haut. Ces notions possèdent toutes les propriétés dans le cas complexe, sauf les théorèmes de comparaison pour la limite d'une fonction et le théorème sur les valeurs intermédiaires pour les fonctions continues sur un intervalle fermé car l'opération de comparaison des nombres complexes n'est pas définie. On généralise de même toutes les notions fondamentales du calcul différentiel, avec conservation de toutes leurs propriétés, sauf les théorèmes de la valeur moyenne. On montre que pour qu'une fonction à valeurs complexes soit différentiable, il faut et il suffit que le soient les parties réelle et imaginaire de cette fonction.

Remarquons que les égalités suivantes découlent de la définition de la limite d'une fonction et de la dérivée des fonctions à valeurs complexes $f(x) = u(x) + iv(x)$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c = a + ib$;

2) $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Considérons quelques exemples de fonctions à valeurs complexes. Si c est un nombre réel, la fonction $f(x) = e^{cx}$ vérifie les égalités $f'(x) = cf(x)$, $f(0) = 1$. Montrons que si c est un nombre complexe,

$c = a + ib$, alors la fonction $f(x) = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ possède les mêmes propriétés. En effet, $f(0) = 1$, $f'(x) = af(x) + ibe^{ax} \times$ $\times (i \sin bx + \cos bx) = cf(x)$. Il est donc logique de désigner la fonction $f(x) = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ par e^{cx}, où $c = a + ib$. Notons que la fonction e^{cx} possède la propriété commune à toute fonction exponentielle :

$$e^{c_1x_1 + c_2x_2} = e^{c_1x_1}e^{c_2x_2}.$$

On prouve l'égalité $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en développant, d'une façon formelle, les fonctions e^{ix}, $\cos x$ et $\sin x$ en séries de Taylor :

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k\,!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)\,!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} = \cos x + i \sin x.$$

Passons aux notions de fonction vectorielle et de fonction matricielle en nous servant de celles de vecteur et de matrice. Supposons données, sur un ensemble numérique A, m fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$. La donnée de ces fonctions définit la fonction vectorielle $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots$ $\ldots, u_m(x))$. D'une façon analogue, on définit une fonction matricielle $u(x)$ comme une matrice d'éléments $u_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Tout comme dans le cas des fonctions réelles, la notion de module d'un vecteur sert à définir celles de limite, de continuité de fonctions vectorielles et les notions fondamentales du calcul différentiel des fonctions vectorielles. Notons les égalités suivantes :

1) si $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$ et $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = b = (b_1, \ldots, b_m)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$;

2) $u'(x) = (u_1'(x), \ldots, u_m'(x))$.

On montre que pour qu'une fonction vectorielle soit différentiable il faut et il suffit que ses composantes le soient ; par ailleurs, les notions de continuité, de dérivée et de différentielle d'une fonction vectorielle possèdent toutes les propriétés examinées plus haut, sauf les théorèmes qui utilisent la division, le théorème sur la valeur intermédiaire d'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et le théorème de la moyenne, car les opérations de division et de comparaison n'ont pas été définies pour les vecteurs. Toutes les propriétés indiquées ont lieu pour les fonctions matricielles (le rôle du module $|\ldots|$ est joué dans le cas des fonctions matricielles par la norme $\|\ldots\|$ de la matrice).

CHAPITRE 5

QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL À L'ÉTUDE DES FONCTIONS

§ 1. Levée d'indétermination

Les théorèmes de la moyenne et la formule de Taylor d'une fonction d'une variable permettent de simplifier le calcul d'un grand nombre de limites, lesquelles, calculées sans astuces par des règles ordinaires, donnent lieu à des indéterminations du type $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Commençons par l'indétermination du type $0/0$. Calculons la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ connaissant que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ et $\varphi(x) \neq 0$ au voisinage du point a. Développons les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ par la formule de Taylor. Soient $f(x) = \alpha(x - a)^p + o[(x - a)^p]$, $\varphi(x) = \beta(x - a)^q + o[(x - a)^q]$, $x \to a$, où $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, p et q sont des entiers positifs. On a alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x - a)^p[1 + o(1)]}{\beta(x - a)^q[1 + o(1)]} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \to a} (x - a)^{p-q} = \begin{cases} 0 & \text{pour } p > q, \\ \alpha/\beta & \text{pour } p = q, \\ \infty & \text{pour } p < q. \end{cases}$$

Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont supposées admettre des dérivées d'ordre voulu pour $x = a$. Si l'on ne suppose pas l'existence des dérivées nécessaires pour $x = a$, on peut profiter, pour lever l'indétermination, des *règles de l'Hospital*. Formulons tout d'abord ces règles pour l'indétermination du type $0/0$.

Théorème. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues et admettent des dérivées premières au voisinage d'un point a, à l'exception peut-être du point a lui-même. Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ ne s'annulent pas au voisinage considéré, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ et le rapport $f'(x)/\varphi'(x)$ tend vers une limite A lorsque $x \to a$, alors le rapport $f(x)/\varphi(x)$ tend lui aussi vers A lorsque $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.*

☐ Posons $f(a) = \varphi(a) = 0$. Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont alors

continues dans un voisinage du point a, y compris au point a. Servons-nous du théorème de Cauchy de la moyenne :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad c \in]a, x[.$$

Comme $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|x - a| < \delta$ on a l'inégalité $\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - A\right| < \varepsilon$. Soit maintenant $|x - a| < \delta$. Alors $|c - a| < |x - a| < \delta$, puisque $c \in]a, x[$. Par conséquent, $\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right| < \varepsilon$ pour $|x - a| < \delta$, c'est-à-dire que le rapport $f(x)/\varphi(x)$ tend vers une limite A lorsque $x \to a$. ■

Remarques sur le théorème. 1) L'assertion du théorème reste vraie si $A = \infty$ (ou $A = +\infty$, $A = -\infty$). En effet, si par exemple $A = +\infty$, alors, quel que soit $C > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > C$ pour $|x - a| < \delta$. D'où $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} > C$ pour $|x - a| < \delta$, puisque $|c - a| < |x - a| < \delta$.

2) On peut remplacer dans l'énoncé du théorème les limites ordinaires par des limites unilatérales en considérant au lieu d'un voisinage du point a les voisinages droits (resp. gauches) du point a sans ce point, c'est-à-dire les intervalles $]a, a + \delta[$ ou $]a - \delta, a[$.

3) L'assertion du théorème reste vraie si $a = \infty$ (ou $a = -\infty$, $a = +\infty$). En effet, soit par exemple $a = \infty$. Posons $t = 1/x$, $F(t) = f(1/t)$, $\Phi(t) = \varphi(1/t)$. Alors

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{\Phi(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{\Phi'(t)} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f'(x)|_{x = 1/t}(-1/t^2)}{\varphi'(x)|_{x = 1/t}(-1/t^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

4) Si $\lim_{x \to a} f'(x) = \lim_{x \to a} \varphi'(x) = 0$, on peut appliquer une seconde fois la règle de l'Hospital au calcul de la limite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour certaines conditions. On trouve en définitive $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$. La procédure peut être réitérée.

Passons aux indéterminations du type ∞/∞.

Théorème. *Soient deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ continues et admettant des dérivées premières au voisinage d'un point a, sauf peut-être au point a. Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ ne s'annulent pas au voisinage considéré, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (ou $+\infty$, $-\infty$) et le rapport $f'(x)/\varphi'(x)$ tend vers une limite A lorsque x tend vers a, alors le rapport $f(x)/\varphi(x)$ converge vers une même limite lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.*

☐ Comme précédemment, nous allons utiliser le théorème de Cauchy de la moyenne :

$$\frac{f(x) - f(t)}{\varphi(x) - \varphi(t)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad c \in]x, t[.$$

Transformons cette relation. Puisque

$$\frac{f(x) - f(t)}{\varphi(x) - \varphi(t)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - f(t)/f(x)}{1 - \varphi(t)/\varphi(x)},$$

on a $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} \psi(x, t)$, où $\psi(x, t) = \dfrac{1 - \varphi(t)/\varphi(x)}{1 - f(t)/f(x)}$. Donc

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \psi(x, t) - A\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right]\psi(x, t) + A[\psi(x, t) - 1]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right| |\psi(x, t)| + |A| |\psi(x, t) - 1|.$$

Comme, par hypothèse, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, alors, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que $|f'(x)/\varphi'(x) - A| < \varepsilon_1$ pour $|x - a| < \delta_1$.

Choisissons x et t de façon à satisfaire aux inégalités $|x - a| < |t - a| < \delta_1$. Comme $c \in]x, t[$, on a dans ce cas $|c - a| < \delta_1$. Fixons un t et faisons tendre x vers a. Comme pour t fixe on a $\lim\limits_{x\to a} \psi(x, t) = 1$, il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un nombre $\delta > 0$ plus petit que $|t - a|$, tel que $|\psi(x, t) - 1| < \varepsilon_1$ pour $|x - a| < \delta$, d'où $|\psi(x, t)| = |[\psi(x, t) - 1] + 1| \leqslant |\psi(x, t) - 1| + 1 < \varepsilon_1 + 1$. Alors pour $|x - a| < \delta < |t - a| < \delta_1$ on a l'inégalité

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A\right| < \varepsilon_1(\varepsilon_1 + 1) + |A|\varepsilon_1.$$

Si $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire, alors, en choisissant ε_1 à partir de la con-

dition $(\varepsilon_1 + 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_1|A| \leqslant \varepsilon$, on aboutit pour $|x - a| < \delta$ à l'inégalité

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A\right| < \varepsilon, \text{ i.e. } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A. \blacksquare$$

Toutes les remarques faites à propos du théorème précédent se rapportent au théorème que nous venons de démontrer (à vérifier à titre d'exercice).

Les indéterminations du type $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ se traitent en les réduisant aux indéterminations considérées plus haut. Par exemple, les indéterminations du type $0\cdot\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, se ramènent comme suit à l'indétermination du type 0/0 :

$$\lim_{x\to a} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}.$$

L'indétermination du type 1^∞, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ pour $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, se ramène à l'indétermination du type $0\cdot\infty$ à l'aide, par exemple, de l'égalité

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

§ 2. Etude du graphique d'une fonction

Appliquons la formule de Taylor à l'étude du graphique de la fonction d'une variable $y = f(x)$. Examinons la situation de la courbe $y = f(x)$ au voisinage du point x_0 par rapport à la tangente passant par le point x_0. Nous avons déduit plus haut l'équation liant les valeurs x et y de cette tangente : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Si $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) pour un certain x, on dira que la courbe $y = f(x)$ passe au point donné x au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Définition. On dit que la courbe $y = f(x)$ a sa *convexité* au point x_0 *dirigée vers le haut* (resp. *vers le bas*) s'il existe un voisinage du point x_0 tel que pour tous ses points la courbe $y = f(x)$ est située au-dessous (resp. au-dessus) de la tangente au point x_0.

Sur la figure 8, la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité vers le bas au point x_1 et vers le haut au point x_2.

Définition. On dit que le point x_0 est un *point d'inflexion* de la courbe $y = f(x)$ si au passage par x_0 le point courant x de la courbe passe d'un côté de la tangente à l'autre.

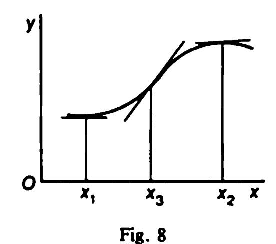


Fig. 8

Par exemple, le point x_3 de la courbe $y = f(x)$ montrée sur la figure 8 est son point d'inflexion. Indiquons les caractères permettant de discerner les points de concavité, de convexité et d'inflexion.

Théorème. *Soit une fonction $f(x)$ admettant dans un voisinage du point x_0 une dérivée seconde continue en x_0, et* $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$). *La courbe $y = f(x)$ est tournée au point x_0 par sa convexité vers le bas* (resp. *vers le haut*).

☐ Servons-nous de la formule de Taylor pour $n = 1$ avec reste de Lagrange :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

où $c \in]x_0, x[$. Si $f''(x_0) > 0$, la fonction $f''(x)$ garde par continuité le signe de $f''(x_0)$ dans un certain voisinage du point x_0. Dans ce voisinage, $f''(c) > 0$ et, par conséquent, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, c'est-à-dire que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité vers le bas. Le cas de $f''(x_0) < 0$ se traite de façon analogue. ■

Théorème. *Soit une fonction $y = f(x)$ admettant dans un voisinage du point x_0 une dérivée trois continue en x_0, et $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$. Le point x_0 est alors un point d'inflexion de la fonction $y = f(x)$.*

☐ La formule de Taylor avec reste de Lagrange nous donne pour $n = 2$:

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{(x - x_0)^3}{3\,!} f'''(c),$$

où $c \in]x_0, x[$. Puisque $f'''(x_0) \neq 0$, la fonction $f'''(x)$ garde par continuité le signe de $f'''(x_0)$ dans un certain voisinage du point x_0. Dans ce voisinage, $f'''(c)$ est de même signe que $f'''(x_0)$, car $c \in]x_0, x[$. La différence $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ change donc de signe au passage par le point x_0, c'est-à-dire que le point x_0 est un point d'inflexion de la fonction $y = f(x)$. ■

Enonçons un théorème plus général.

Théorème. *Supposons qu'une fonction $y = f(x)$ admet dans un certain voisinage du point x_0 une dérivée $f^{(k+1)}(x)$ continue en x_0, de plus*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0, \quad f^{(k+1)}(x_0) \neq 0.$$

Alors, si k est impair, la courbe $y = f(x)$ a sa convexité au point x_0 tournée vers le haut (resp. *vers le bas*) *pour $f^{(k+1)}(x_0) < 0$* (resp. $f^{(k+1)}(x_0) > 0$) ; *si k est pair, le point x_0 est un point d'inflexion de la courbe $y = f(x)$. Si, en outre, $f'(x_0) = 0$, alors, pour k impair, la fonction $y = f(x)$ admet au point x_0 un maximum* (resp. *un minimum*) *pour $f^{(k+1)}(x_0) < 0$* (resp. $f^{(k+1)}(x_0) > 0$).

La démonstration du théorème est analogue à celle des théorèmes précédents et s'appuie sur la formule de Taylor :

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}, \quad c \in]x_0, x[.$$

Introduisons la notion d'asymptote qui s'avère parfois utile lors de l'étude du graphique de la fonction $y = f(x)$.

Définition. La droite $y = ax + b$ s'appelle *asymptote* de la courbe $y = f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ (resp. } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0).$$

Indiquons les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une asymptote. Supposons que la courbe $y = f(x)$ admet pour asymptote la droite $y = ax + b$ lorsque $x \to +\infty$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0, \text{ d'où } a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

La quantité b est tirée pour a connu de l'égalité $b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$.

La réciproque est également vraie : si existent les limites a et b, la courbe $y = ax + b$ est une asymptote de la courbe $y = f(x)$ pour $x \to +\infty$. La condition d'existence d'une asymptote lorsque $x \to -\infty$ s'énonce et se démontre de façon analogue.

Dans le cas où $\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) on dit parfois que la courbe $y = f(x)$ admet pour $x = a$ une asymptote verticale.

Ainsi, nous avons considéré des méthodes d'analyse qualitative des graphiques de fonctions. On peut proposer l'algorithme suivant d'analyse des graphiques :

1) chercher le domaine de définition et, si possible, le domaine des valeurs de la fonction étudiée ;

2) déterminer le domaine d'invariance de signe de la fonction (si c'est faisable) ;

3) chercher les points de discontinuité et déterminer leur nature ;

4) chercher les asymptotes ;

5) calculer les valeurs particulières de la fonction et esquisser le graphique ;

6) chercher les domaines de croissance et de décroissance, les points d'extémums de la fonction d'après le signe de sa dérivée première ;

7) classer les points d'extrémums et déterminer la situation possible des points d'inflexion d'après le signe de la dérivée seconde. Préciser la situation des points d'inflexion en utilisant la dérivée trois ;

8) dessiner le graphique approximatif de la fonction.

Si le calcul de certaines dérivées ou la détermination de leur signe s'avèrent trop difficiles, on peut sauter les numéros correspondants du schéma d'étude.

Exemple. Etudier le graphique de la fonction $y = x^2/(2x + 3)$.

1) Le domaine de définition de la fonction sont les intervalles $]-\infty, -3/2[$, $]-3/2, +\infty[$, le domaine des valeurs, l'intervalle $]-\infty, \infty[$.

2) Pour $x < -3/2$ on a $y < 0$, pour $x > -3/2$ on a $y \geqslant 0$. Pour $x = -(3/2)$ la fonction admet une asymptote verticale (le point de discontinuité de deuxième espèce).

3) Comme $\lim\limits_{x\to\infty} (y/x) = 1/2$, $\lim\limits_{x\to\infty} [y - x/2] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - (2x + 3)x}{2(2x + 3)} =$ $= -3/4$, la fonction admet pour $x \to \pm\infty$ l'asymptote $y = x/2 - 3/4$.

4) $y' = \dfrac{2x(x + 3)}{(2x + 3)^2}$. Pour $x < -3$ on a $y' > 0$, c'est-à-dire que la fonction croît ; pour $-3 < x < 0$ la fonction décroît et pour $x > 0$ elle croît. Le point $x = -3$ est donc un point de maximum et le point $x = 0$, un point de minimum ($y(-3) = -3$, $y(0) = 0$). Le calcul de la dérivée seconde est dans ce cas assez difficile. Le graphique de la fonction est montré sur la figure 9.

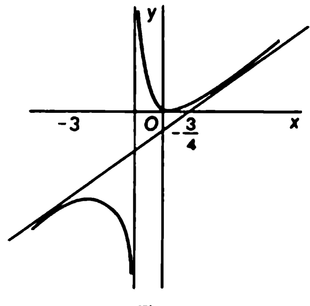


Fig. 9

Exercice. Etudier le graphique de la fonction $y = (2x^2 + 5x + 6)/(x + 1)$.

§ 3. Méthodes approchées de calcul des racines

Notre schéma d'analyse qualitative du graphique d'une fonction implique le calcul des racines de l'équation $f(x) = 0$. Obtenir une expression analytique pour les racines de l'équation $f(x) = 0$ n'est possible que dans les cas les plus simples. Il se pose donc la question d'un calcul approché des racines avec une précision voulue. Une des méthodes de calcul des racines (méthode de la fourchette) a été considérée lors de l'étude des fonctions continues. Indiquons quelques autres méthodes approchées de calcul des racines.

1. Méthode itérative (méthode des approximations successives). Récrivons l'équation $f(x) = 0$ sous une forme équivalente : $x = \varphi(x)$. Il est toujours possible de le faire en posant, par exemple, $\varphi(x) = f(x) + x$. Calculons la suite des x_n en choisissant x_0 arbitraire dans le domaine de définition de la fonction $\varphi(x)$ et en posant $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ On a le théorème suivant.

Théorème. *Supposons que la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Alors, si les approximations successives x_n appartiennent à l'intervalle $[a, b]$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$, α est racine de l'équation $x = \varphi(x)$.*

□ Comme $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$ et l'ensemble $[a, b]$ est fermé, on a $\alpha \in [a, b]$. Passons dans la relation $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ à la limite pour $n \to \infty$. La fonction $\varphi(x)$ étant continue, on a $\lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\alpha)$, d'où $\alpha = \varphi(\alpha)$. ■

Pour l'applicabilité de ce théorème il faut assurer la convergence de la suite $\{x_n\}$. Chaque approximation x_{n+1} calculée par la formule $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ approche mieux la racine de l'équation $x = \varphi(x)$ que l'approximation précédente x_n si la fonction $\varphi(x)$ dépend faiblement de x ($\varphi(x)$ et $\varphi(x_n)$ sont alors proches même si x et x_n diffèrent fortement). Ceci a, en particulier, lieu si la dérivée $\varphi'(x)$ est petite.

Théorème. *Soit α racine de l'équation $x = \varphi(x)$ et supposons que la dérivée $\varphi'(x)$ satisfait à la condition $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ sur un intervalle fermé $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $\delta > 0$. Si alors l'approximation initiale $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, les approximations successives x_n calculées par la formule $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convergent vers α lorsque $n \to \infty$.*

□ Nous avons $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$. Montrons que $|x_n - \alpha| \leqslant \delta$, c'est-à-dire que $x_n \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Raisonnons par récurrence. Supposons que $|x_n - \alpha| \leqslant \delta$ et montrons que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \delta$. En effet, la formule de

Lagrange des accroissements finis nous donne

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\varphi(x_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)(x_n - \alpha)| \leqslant q|x_n - \alpha| \leqslant \delta,$$
$$c \in]\alpha, x_n[.$$

Ainsi, $|x_n - \alpha| \leqslant \delta$ pour tout n. En outre, comme montré auparavant, $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant q|x_n - \alpha|$, d'où

$$|x_1 - \alpha| \leqslant q|x_0 - \alpha|, \ |x_2 - \alpha| \leqslant q|x_1 - \alpha| \leqslant q^2|x_0 - \alpha|, \ldots$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, et nous aboutissons par récurrence à l'inégalité $|x_n - \alpha| \leqslant q^n|x_0 - \alpha|$. Comme $q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. ■

Considérons l'une des méthodes itératives les plus usitées, à savoir la *méthode des tangentes,* dite également *méthode de Newton.*

2. Méthode des tangentes. Supposons que la valeur $x = x_0$ est proche de la racine de l'équation $f(x) = 0$. Servons-nous de la formule de Taylor, il vient : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. En rejetant le reste, ce qui équivaut à remplacer le graphique de la fonction $y = f(x)$ par la tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ à ce graphique au point x_0, nous obtenons l'approximation suivante de la racine, à savoir $x = x_1$, où $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. En poursuivant le processus de précision de la racine, nous arrivons à la méthode itérative suivante :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n),$$

en accord avec la méthode itérative générale de recherche de la racine de l'équation $x = \varphi(x)$ pour $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Il est évident que la condition d'applicabilité de la méthode itérative est que $f'(x) \neq 0$ au voisinage de la racine de l'équation $f(x) = 0$.

Théorème. *Supposons que sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *l'équation* $f(x) = 0$ *admet une racine* $x = \alpha \in]a, b[$, *la fonction* $f'(x)$ *n'est pas nulle et la fonction* $f''(x)$ *est bornée. Il existe alors un nombre* δ *tel que la suite des* x_n *obtenue par la méthode de Newton*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge pour $n \to \infty$ *vers une limite égale à* α *si l'approximation initiale* $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

□ Dans le cas considéré, α est la racine de l'équation $x = \varphi(x)$ si $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$. Pour pouvoir appliquer le théorème de la convergence de la méthode d'itérations, cherchons la majoration de la dérivée

$\varphi'(x)$. On a

$$\varphi'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

La dérivée seconde $f''(x)$ existe sur l'intervalle $[a, b]$, donc la fonction $f'(x)$ est continue sur cet intervalle et la fonction $[f'(x)]^2$ y atteint ses valeurs maximale et minimale, c'est-à-dire que $[f'(x)]^2 \geqslant m$, m est une constante. Il est évident qu'on peut choisir $m > 0$, puisque $f'(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$. En outre, on a par hypothèse $|f''(x)| \leqslant M$, où M est une constante. Ainsi donc

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{M}{m}|f(x)|.$$

Comme $f(\alpha) = 0$ et la fonction $f(x)$ est continue en $x = \alpha$, on a $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0$. Donc pour tout $q \in]0, 1[$ il existe un δ tel que $\frac{M}{m}|f(x)| \leqslant$ $\leqslant q$ si $|x - \alpha| \leqslant \delta$. Ainsi donc, pour $|x - \alpha| \leqslant \delta$, $x \in [a, b]$, on a $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. Reste à appliquer le théorème précédent. ■

Il est évident que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi'(x_n) = 0$, par conséquent, la convergence de la méthode d'itérations est dans ce cas très rapide.

Outre la méthode des tangentes, on utilise pour le calcul des racines d'équations la *méthode des cordes*, qui consiste à remplacer le graphique de la fonction $y = f(x)$ par une droite (corde) passant par les points x_1, $y_1 = f(x_1)$ et $x_2, y_2 = f(x_2)$ en lesquels la fonction $f(x)$ est de signes différents. Le point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox donne la valeur approchée de la racine $\bar{x}$. La procédure est ensuite réitérée, avec les valeurs x_1 et $\bar{x}$ ou x_2 et $\bar{x}$ au lieu de x_1 et x_2 (il faut veiller à ce que la fonction $f(x)$ ait aux extrémités de $[x_1, \bar{x}]$ ou de $[\bar{x}, x_2]$ des signes différents). La méthode des cordes converge souvent plus lentement même que la méthode de la fourchette, pour cette raison nous n'allons pas nous arrêter sur cette question.

Nous avons donc considéré quelques méthodes générales de calcul des racines de l'équation $f(x) = 0$. Si la fonction $f(x)$ est un polynôme, on peut se servir d'une méthode spéciale permettant de calculer même les racines complexes.

Exemple. Cherchons la valeur $\sqrt{a}$ par la méthode de Newton. Posant $x = \sqrt{a}$, nous obtenons l'équation $x^2 - a = 0$; en résolvant cette équation, nous aboutissons à la procédure itérative suivante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Pour mettre en évidence la rapidité de convergence de la méthode, posons $a = 4$ $(x = 2)$, $x_0 = 1$. Nous obtenons : $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $x_2 = 2\frac{1}{20}$, $x_3 = 2\frac{1}{1640}$. Cette méthode de calcul de $\sqrt{a}$ est largement utilisée dans les calculs approchés.

§ 4. Interpolation

Dans nombre de cas, la fonction $f(x)$ est donnée par une table (ses valeurs sont obtenues comme résultat de mesures ou bien son expression analytique est très complexe). Il s'agit de choisir une fonction suffisamment simple dont les valeurs soient égales aux valeurs tabulaires et aux valeurs intermédiaires de la fonction $f(x)$ à une précision voulue près. Une telle substitution à la fonction donnée d'une fonction simple s'appelle *interpolation*. Bornons-nous au cas d'interpolation des fonctions par des polynômes. Seules seront considérées des fonctions d'une variable.

Soit une fonction $f(x)$ donnée aux points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Choisissons le polynôme $L_n(x)$ à partir des conditions

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Puisqu'un polynôme arbitraire de degré m contient $m + 1$ coefficients arbitraires (facteurs des puissances de x), il n'est en général possible de satisfaire à la $(n + 1)$-ième condition que moyennant un polynôme d'un degré non inférieur à n. Montrons que le polynôme $L_n(x)$ de degré n défini sans ambiguïté par les conditions

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes $L_n(x)$ et $\bar{L}_n(x)$ de degré n vérifiant les conditions

$$L_n(x_i) = \bar{L}_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Le polynôme $L_n(x) - \bar{L}_n(x)$ de degré n s'annulerait alors en $n + 1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ce qui est impossible. Construisons le polynôme $L_n(x)$. Commençons par construire le polynôme $L_{n,j}(x)$ de degré n vérifiant les conditions plus simples :

$$L_{n,j}(x_j) = 1, \quad L_{n,j}(x_k) = 0 \text{ pour } k \neq j.$$

On montre que dans ce cas le polynôme $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_{n,j}(x)$ vérifie les conditions nécessaires, c'est-à-dire que

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Le polynôme $L_{n,j}(x)$ s'annule en n points $x = x_k$ pour $k \neq j$ et est de degré n. Il doit donc se diviser exactement par le polynôme $\prod_{k \neq j} (x - x_k)$, autrement dit

$$L_{n,j}(x) = c_j \prod_{k \neq j} (x - x_k),$$

où c_j est une constante. (Par la notation $\prod_{k \neq j} (x - x_k)$ on a désigné le produit $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$.) La constante c_j s'obtient facilement à partir de la condition $L_{n,j}(x_j) = 1$. On trouve $L_{n,j}(x) = \prod_{k \neq j} (x - x_k) / \prod_{k \neq j} (x_j - x_k)$, d'où

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.$$

Ce polynôme coïncide avec la fonction $f(x)$ aux points $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ et porte le nom de *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

Estimons l'erreur que nous commettons en remplaçant la fonction $f(x)$ par le polynôme $L_n(x)$. Nous avons

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

où $R_n(x)$ est l'erreur. Supposons, pour estimer cette erreur en un point fixe $x = \bar{x}$ pour $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, que la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et admet sur l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, avec $\bar{x}, x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \dots, n$. Construisons, d'après les points $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$ de la fonction $f(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_{n+1}(x)$, c'est-à-dire un polynôme de degré $n + 1$ satisfaisant aux conditions

$$L_{n+1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n\,; \quad L_{n+1}(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Ce polynôme est de la forme

$$L_{n+1}(x) = f(\bar{x}) \frac{\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=0}^{n} (\bar{x} - x_k)} + \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \frac{(x - \bar{x}) \prod_{k \neq j} (x - x_k)}{(x_j - \bar{x}) \prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.$$

La fonction $F(x) = f(x) - L_{n+1}(x)$ s'annule en $n + 2$ points x_0, $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$. En vertu du théorème de Rolle, dans chacun des intervalles délimités par ces points, il existe une valeur x qui annule la dérivée $F'(x)$: $F'(c_k^{(1)}) = 0, k = 0, 1, \ldots, n$, où $c_k^{(1)} \in]a, b[$. Mêmes raisonnements pour la fonction $F'(x)$ à la place de la fonction $F(x)$, c'est-à-dire qu'il existe des points $c_k^{(2)} \in]a, b[, k = 0, 1, \ldots, n - 1$, en lesquels $F''(c_k^{(2)}) = 0$. En raisonnant de cette façon on aboutit à la conclusion qu'il existe un tel point $c \in]a, b[$ où $F^{(n+1)}(c) = 0$. Calculons la dérivée $[L_{n+1}(x)]^{(n+1)}$. Les produits $\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$, $(x - \bar{x})\prod_{k \neq j}(x - x_k)$ sont des polynômes de degré $n + 1$ avec le coefficient de la puissance supérieure égal à 1. On en tire que la dérivée d'ordre $n + 1$ de tels polynômes est égale à $(n + 1)\,!$. Donc

$$[L_{n+1}(x)]^{(n+1)} =$$

$$= (n+1)\,!\left[\frac{f(\bar{x})}{\prod_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)} + \sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j - \bar{x})\prod_{k \neq j}(x_j - x_k)}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{\prod_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}\left[f(\bar{x}) - \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{\prod_{k \neq j}(\bar{x} - x_k)}{\prod_{k \neq j}^{n}(x_j - x_k)}\right],$$

puisque $\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}{x_j - \bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - x_j}{x_j - \bar{x}}\prod_{k \neq j}(\bar{x} - x_k) = -\prod_{k \neq j}(\bar{x} - x_k)$. D'où

$$[L_{n+1}(x)]^{(n+1)} = \frac{(n+1)\,!}{\prod_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}[f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})] = \frac{(n+1)\,!R_n(\bar{x})}{\prod_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}.$$

L'égalité $F^{(n+1)}(c) = 0$ est équivalente à la suivante :

$$R_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\sum_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k), \quad c \in]a, b[.$$

Nous avons obtenu l'estimation de l'erreur commise en remplaçant la fonction $f(x)$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_n(x)$ construit d'après les points x_k, $k = 0, 1, ..., n$. Le polynôme $\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$ intervenant dans l'estimation de l'erreur croît vite avec l'éloignement de x par rapport aux extrémités de l'intervalle contenant les points x_k, pour cette raison il est déconseillé d'utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les valeurs de x situées en dehors de cet intervalle. On emploie le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $n = 1$ (interpolation linéaire) et pour $n = 2$ (interpolation quadratique).

Exemple. A l'aide du polynôme de Lagrange construit pour la fonction $f(x) = \sin x$ en points $x = 0$, $x = \pi/6$, $x = \pi/2$, chercher la valeur approximative de $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Nous avons

$$L_2(x) = f(0)\frac{(x - \pi/6)(x - \pi/2)}{(-\pi/6)(-\pi/2)} + f\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{(x - 0)(x - \pi/2)}{(\pi/6 - 0)(\pi/6 - \pi/2)} +$$
$$+ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x - 0)(x - \pi/6)}{(\pi/2 - 0)(\pi/2 - \pi/6)} = \frac{1}{2}\frac{(\pi/2 - x)x}{\pi^2/18} + 1\frac{x(x - \pi/6)}{\pi^2/18}.$$

On en tire $L_2(\pi/4) = 11/16$, résultat qui est proche de $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$. Puisque $(\sin x)''' = -\cos x$, nous obtenons l'estimation suivante de l'erreur

$$R_2(\pi/4) = -(\cos c/3\,!)(\pi/4 - 0)(\pi/4 - \pi/6)(\pi/4 - \pi/2), c \in]0, \pi/2[,$$

i. e. $|R_2| \leqslant \pi^3/1152 < 0{,}03$.

Exercice. La fonction $f(x)$ est donnée sous la forme d'une table :

x	0	3	6	9
$f(x)$	9	6	3	0

. Calculer $f(2)$ en utilisant l'approximation quadratique.

§ 5. Fonctions implicites

Supposons que les valeurs x et y annulant la fonction $F(x, y)$ [$x = (x_1, ..., x_m)$, y est un scalaire] appartiennent aux ensembles A et B respectivement. Si pour chaque $x \in A$ la relation $F(x, y) = 0$ n'est satisfaite que par une seule valeur de y, cette relation établit alors une correspondance entre $x \in A$ et $y \in B$. On dit dans ce cas que la relation $F(x, y) = 0$ définit *implicitement* une fonction $y = f(x)$ dont l'ensemble A est le domaine de définition et l'ensemble B, le domaine des valeurs. Dans le même ordre d'idées, on considère les fonctions implicites $y_i = f_i(x)$,

$x = (x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, définies par un système d'équations

$$F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_l) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Examinons la question d'existence d'une fonction $y = f(x)$ définie implicitement à l'aide de l'équation $F(x, y) = 0, x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Théorème. *Supposons que dans un δ-voisinage du point (x_0, y_0) la fonction $F(x, y), x = (x_1, \ldots, x_m)$, est continue et admet une dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}$ vérifiant la condition $\left|\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right| \geqslant c > 0$, c étant une constante, avec $F(x_0, y_0) = 0$. Il existe alors un voisinage du point (x_0, y_0) dans lequel l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction continue unique $y = f(x)$ vérifiant la condition $y_0 = f(x_0)$.*

□ Comme $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, la fonction $F(x_0, y)$ est strictement monotone dans un certain voisinage $|y - y_0| \leqslant \delta_0 < \delta$. En vertu de l'égalité $F(x_0, y_0) = 0$, les valeurs $F(x_0, y_0 - \delta_0)$ et $F(x_0, y_0 + \delta_0)$ sont de signes opposés. Ensuite, les fonctions $F(x, y_0 - \delta_0)$ et $F(x, y_0 + \delta_0)$ sont continues au voisinage du point x_0, il existe alors un $\delta_1 < \delta$ tel que ces fonctions gardent leur signe pour $|x - x_0| < \delta_1$, c'est-à-dire que les valeurs $F(x, y_0 - \delta_0)$ et $F(x, y_0 + \delta_0)$ sont de signes contraires pour $|x - x_0| < \delta_1$. Ainsi donc, en vertu de la continuité de la fonction $F(x, y)$ en la variable y pour x fixe, il doit exister dans le voisinage $|y - y_0| < \delta_0$ un nombre $y = f(x)$ tel que $F(x, y) = 0$. Montrons que la solution de l'équation $F(x, y) = 0$ est unique. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $F(x, y_1) = 0$ et $F(x, y_2) = 0$. On a alors par la formule de Lagrange

$$0 = F(x, y_2) - F(x, y_1) = \frac{\partial F(x, \bar{y})}{\partial y}(y_2 - y_1), \quad \bar{y} \in]y_1, y_2[,$$

ce qui n'est possible que si $y_2 = y_1$, puisque $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$.

Démontrons la continuité de la fonction $y = f(x)$. Supposons qu'à l'accroissement Δx correspond l'accroissement Δy. Alors $F(x, y) = 0$ et $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, d'où

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$
$$= [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)] + [F(x + \Delta x, y) - F(x, y)].$$

Or, on a d'après la formule de Lagrange

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x + \Delta x, \bar{y})\Delta y,$$
$$\bar{y} \in]y, y + \Delta y[.$$

D'où

$$\Delta y = -\frac{[F(x+\Delta x, y) - F(x, y)]}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\Delta x, \bar{y})}.$$

Comme $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x+\Delta x, \bar{y})\right| \geqslant c > 0$, on tire de l'égalité précédente que $\Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$, ce qui veut dire que la fonction $y = f(x)$ est continue. La condition $y_0 = f(x_0)$ découle de l'égalité $F(x_0, y_0) = 0$. ■

Remarque. La condition $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right| \geqslant c > 0$ peut être remplacée par la condition de continuité de la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ dans un voisinage du point (x_0, y_0) et la condition $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Sous ces conditions, l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)$ pour un certain k implique celle de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$. En effet, au cours de la démonstration du théorème, il a été établi que les accroissements $\Delta y = \Delta f(x)$ et Δx sont liés par la relation

$$\Delta y = -\frac{[F(x+\Delta x, y) - F(x, y)]}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\Delta x, \bar{y})}, \quad \bar{y} \in]y, y+\Delta y[.$$

Soit $\Delta x = \Delta_k x$ (seule change la variable de numéro k) et $\Delta x_k \to 0$. Comme dans ce cas $\Delta y \to 0$ également, l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)$ et la continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ impliquent l'égalité

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} =$$

$$= -\lim_{\substack{\Delta x_k \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta_k x, y) - F(x, y)}{\Delta x_k} \Bigg/ \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0, \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial F}{\partial y}(x+\Delta_k x, \bar{y}) =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \Bigg/ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Dans le voisinage considéré, la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, donc la

fonction $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ est continue si telle est la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)$.

Déterminons les conditions d'existence des fonctions implicites définies par un système d'équations.

Théorème. *Supposons que les fonctions* $F_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, *de* $m + l$ *variables* $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_l)$ *sont continues et admettent des dérivées partielles continues* $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ *dans un voisinage du point* (x_0, y_0), *où* $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0m})$, $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0l})$, *avec par ailleurs* $F_i(x_0, y_0) = 0$, *et le déterminant* $I = \operatorname{Det}\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$ *n'est pas nul en ce point. Il existe alors un voisinage du point* (x_0, y_0) *dans lequel le système d'équations* $F_i(x, y) = 0$ *définit des fonctions continues uniques* $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, *vérifiant les conditions* $y_{0i} = f_i(x_0)$. *Si, en outre, existent des dérivées partielles continues* $\dfrac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_k}$ *pour un certain k, alors les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}$ *existent également.*

□ Comme montré plus haut, le théorème est vrai pour $l = 1$. Pour $l > 1$, montrons-le par récurrence, supposant qu'il est vrai pour $l - 1$ équations. Le déterminant $I = \operatorname{Det}\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$ n'étant pas nul au point (x_0, y_0), l'un au moins des mineurs I_i pour les éléments de la dernière colonne du déterminant doit être non nul en ce point, puisque

$$I = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{l+i} I_i \frac{\partial F_i}{\partial y_l}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que c'est le mineur $I_l = \operatorname{Det}\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$, $i < l$, $j < l$. (Tous les raisonnements qui suivent restent en vigueur si ce n'est pas le mineur I_l qui est non nul, mais un mineur I_i.) En vertu de la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ au voisinage du point (x_0, y_0), il existe un δ-voisinage de ce point dans lequel $I \neq 0$, $I_l \neq 0$.

Considérons dans ce voisinage les $l - 1$ premières équations $F_i(x, y) = 0$. Comme $I_l = \operatorname{Det}\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\| \neq 0$, $i < l$, $j < l$, ces équations définissent par hypothèse, dans un certain voisinage du point (x_0, y_0), $l - 1$ fonctions implicites des $m + 1$ variables $x = x_1, \ldots, x_m$ et y_l, c'est-à-dire que

$y_i = \varphi_i(x, y_l)$, $i < l$. Les fonctions $\varphi_i(x, y_l)$ et $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_l}(x, y_l)$ sont continues, de plus $y_{0i} = \varphi_i(x_0, y_{0l})$, $i < l$. Si les fonctions $F_i(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x, y)$ pour un certain k, il existe également des dérivées partielles continues $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}(x, y_l)$. Reste à satisfaire à la dernière équation $F_l(x, y) = 0$. Portons dans cette équation les expressions de y_i pour $i < l$. On a $F_l(x, y) = \Phi(x, y_l) = 0$, où les fonctions $\Phi(x, y_l)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y_l}(x, y_l)$ sont continues. En outre, dans le cas d'existence des dérivées partielles continues $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x, y)$ pour un certain k, la fonction $\Phi(x, y_l)$ admet la dérivée partielle continue $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}$. Montrons que $\frac{\partial\Phi}{\partial y_l} \neq 0$. En dérivant les égalités $F_l(x, y) = \Phi(x, y_l)$, $F_i(x, y) = 0$, où $y_i = \varphi_i(x, y_l)$ pour $i < l$, d'après la règle de dérivation d'une fonction composée on trouve

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_l} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_l} = 0, \qquad \frac{\partial F_l}{\partial y_l} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\partial F_l}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_l} = \frac{\partial\Phi}{\partial y_l}.$$

Multiplions ces égalités respectivement par $(-1)^{l+i} I_i$ et I_l et sommons. Utilisant les propriétés d'un déterminant, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{l} (-1)^{l+i} I_i \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 \text{ pour } j < l, \\ I \text{ pour } j = l, \end{cases}$$

le premier membre de cette égalité représentant la somme des produits des éléments de la colonne de numéro j par les compléments algébriques des éléments de la dernière colonne du déterminant I. On en tire $I = I_l \frac{\partial\Phi}{\partial y_l}$.

Mais $I_l \neq 0$, $I \neq 0$, donc $\frac{\partial\Phi}{\partial y_l} \neq 0$ et l'équation $\Phi(x, y_l) = 0$ définit la fonction implicite $y_l = f_l(x)$ dans un certain voisinage du point (x_0, y_0). La fonction $f_l(x)$ est continue. Si, en outre, existent les dérivées partielles continues $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ pour un certain k, il doit exister la dérivée partielle continue $\frac{\partial f_l(x)}{\partial x_k}$, puisque la dérivée partielle $\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}$ existe sous ces conditions et est continue. En substituant l'expression obtenue de y_l dans les égalités

$y_i = \varphi_i(x, y_l)$, $i < l$, on s'assure que dans un voisinage du point (x_0, y_0), il existe des fonctions continues uniques $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, définies implicitement par le système d'équations $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Si, pour un certain k, existent les dérivées partielles continues $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, il doit exister également les dérivées partielles continues $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$. La condition $y_{0i} = f_i(x_0)$ est remplie en vertu des égalités $F_i(x_0, y_0) = 0$. ■

Exercice. Chercher les dérivées première et seconde de la fonction $y(x)$ définie par l'équation $y - \varepsilon \sin y = x$, $0 < \varepsilon < 1$.

§ 6. Systèmes de fonctions dépendants et indépendants

Soient données, sur un ensemble ouvert A de variation des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x$, des fonctions $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, admettant des dérivées partielles continues d'ordre un, c'est-à-dire des fonctions dites *continûment différentiables,* ou *de classe* C^1.

Définition. On dira qu'une fonction $y_k = f_k(x)$ *dépend* sur un ouvert A des fonctions $y_i = f_i(x)$, $i \leqslant n$, $i \neq k$, s'il existe une fonction continûment différentiable $F(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ telle que pour tout $x \in A$ on a l'égalité $y_k = F(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ pour $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront dites *dépendantes,* ou *liées,* sur un ensemble ouvert A, si l'une d'elles dépend des autres. Dans le cas contraire, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont *indépendantes.*

Exemple. Soient $u = 1$, $v = x + y + z$. Ce système est lié, puisque $u = F(v)$, où $F(v) = 1$.

Voyons sous quelles conditions les fonctions sont liées ou indépendantes. Soient données, sur un ouvert A, des fonctions $y_i = f_i(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m \geqslant n$. Considérons la matrice rectangulaire à éléments $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ appelée *matrice de Jacobi.*

Théorème. *Si les fonctions $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont dépendantes sur un ouvert A, alors tous les mineurs d'ordre n de la matrice de Jacobi sont nuls sur cet ensemble.*

□ Supposons qu'une des fonctions $f_i(x)$ dépend des autres. En renumérotant ces fonctions, on peut toujours attribuer à cette fonction le numéro n, donc $y_n = F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ sur l'ensemble A. En dérivant cette

égalité, on trouve

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

L'égalité obtenue signifie que dans la matrice de Jacobi d'éléments $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ la ligne de numéro n est combinaison linéaire des autres lignes. On en déduit que tous les mineurs d'ordre n de la matrice de Jacobi (ceux-ci contiennent toutes les n lignes) sont nuls en vertu de la propriété connue des déterminants. ■

Enonçons un théorème plus général.

Théorème. *Supposons que n fonctions $y_i = f_i(x)$ de m variables ($m \geqslant n$) admettent des dérivées partielles continues d'ordre un dans un voisinage du point $x = x_0$. Si tous les mineurs d'ordre $s + 1$ de la matrice de Jacobi $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$ sont nuls dans ce voisinage et s'il existe au moins un mineur d'ordre s non nul au point x_0, alors dans un certain voisinage du point x_0 les fonctions constituant ce mineur sont indépendantes, tandis que les autres $n - s$ fonctions en dépendent.*

□ Une renumérotation des fonctions $f_i(x)$ ou des variables $(x_1, \ldots, x_m)$ conduit à ce que les lignes ou les colonnes de la matrice jacobienne changent de place. On peut donc numéroter les fonctions $f_i(x)$ et les variables $(x_1, \ldots, x_m)$ de façon que pour $x = x_0$ le mineur non nul Δ_s d'ordre s de la jacobienne se trouve dans le coin supérieur gauche

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pour } x = x_0.$$

En vertu du théorème précédent, les fonctions $y_1 = f_1(x), \ldots, y_s = f_s(x)$ sont indépendantes dans le voisinage considéré. Reste à prouver que les fonctions $y_{s+1}(x), \ldots, y_n(x)$ se laissent exprimer, dans un certain voisinage du point x_0, par les fonctions $y_1(x), \ldots, y_s(x)$. Considérons les égalités $f_i(x) - y_i \equiv f_i(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_m) - y_i = 0$, $i \leqslant s$. Les fonctions $F_i = f_i(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_m) - y_i$ vérifient les conditions du théorème sur les fonctions implicites des variables $(y_1, \ldots, y_s, x_{s+1}, \ldots, x_m)$ données par un système d'équations $F_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$, car au voisinage du point $(x_{0,1}, \ldots, x_{0,m}, y_{0,1}, \ldots, y_{0,s})$, où $y_{0,i} = f_i(x_0)$, les fonctions F_i

admettent des dérivées partielles continues d'ordre un et le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} \equiv \Delta_s$$

n'est pas nul pour $x_i = x_{0,\,i}$, $y_i = y_{0,\,i}$. En considérant les équations $F_i(x_1, \dots, x_m, y_i) = 0$ dans un certain voisinage du point $(x_{0,\,1}, \dots, x_{0,\,m}, y_{0,\,1}, \dots, y_{0,\,s})$, dans lequel $\Delta_s \neq 0$, on trouve $x_j = \psi_j(y_1, \dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$, $j \leqslant s$, où les fonctions ψ_j sont continues et admettent des dérivées partielles continues d'ordre un. En portant les expressions de $x_1, \dots, x_s$ dans les égalités $y_l = f_l(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$, on trouve pour $l > s$ que $y_l = \Phi_l(y_1, y_2, \dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$, $l > s$, les fonctions Φ_l étant continues et admettant des dérivées partielles continues d'ordre un. Montrons que les fonctions Φ_l ne dépendent effectivement pas des variables $(x_{s+1}, \dots, x_m)$. Il suffit pour cela de montrer que $\frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} = 0$, $k > s$. En appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée des variables $(y_1, \dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$, on tire des relations $y_i = f_i(x)$, $i < s$, $\Phi_l(y_1, \dots$ $\dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_m) = f_l(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$, $l > s$, où $x_j =$ $= \psi_j(y_1, \dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_m)$; $j \leqslant s$, pour $k > s$, que

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pour } i \leqslant s,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} \quad \text{pour } l > s.$$

Explicitons le mineur nul de la matrice jacobienne d'ordre $s + 1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_l}{\partial x_s} & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{vmatrix}.$$

Multiplions l'égalité qui contient les dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ pour $i \leqslant s$, par le

complément algébrique D_i de l'élément $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ qui se trouve dans la dernière colonne du mineur Δ, et multiplions la dernière égalité par le complément algébrique de l'élément $\dfrac{\partial f_l}{\partial x_k}$, c'est-à-dire par Δ_s. En additionnant les relations obtenues et en intervertissant l'ordre de sommation suivant les indices i et j, on trouve

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} D_i + \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \Delta_s \right] + \left[\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} D_i + \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \Delta_s \right] = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} \Delta_s .$$

Or, en vertu de la propriété connue des déterminants, la somme $\sum_{i=1}^{s} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} D_i + \dfrac{\partial f_l}{\partial x_j} \Delta_s$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $j = k$, est égale au déterminant obtenu à partir de Δ en substituant à la dernière colonne la colonne de numéro j, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} D_i + \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \Delta_s = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \leqslant s, \\ \Delta & \text{pour } j = k. \end{cases}$$

Donc $\dfrac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} \Delta_s = \Delta$. Comme dans le domaine considéré de variation des variables du problème on a $\Delta_s \neq 0$, $\Delta = 0$, alors $\dfrac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} = 0$, $l > s$, $k > s$. ■

Exercice. Dire si les fonctions $u_1 = x + y$, $u_2 = y + z$, $u_3 = z + x$ sont indépendantes ou liées.

§ 7. Extrémum local d'une fonction de plusieurs variables

Supposons qu'une fonction $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, est définie sur un ensemble A et x_0 est le point intérieur de cet ensemble.

Définition. La fonction $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, admet au point x_0,

$x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,m})$, un ***maximum*** (resp. un ***minimum***) ***local*** s'il existe un voisinage du point x_0 dans lequel $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Un maximum local et un minimum local portent l'appellation d'***extrémum local***. Introduisons la notation $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$. La condition d'un maximum (resp. d'un minimum) local s'écrit alors : $\Delta f(x_0) \leqslant 0$ (resp. $\Delta f(x_0) \geqslant 0$) pour $|\Delta x| < \delta$. La condition nécessaire d'un extrémum local d'une fonction de plusieurs variables différentiable au point x_0 se déduit de la condition nécessaire d'un extrémum local d'une fonction d'une variable. Il suffit de fixer les valeurs de toutes les variables sauf une, x_j, en posant $x_i = x_{0,i}$ pour $i \neq j$. Il est évident que la fonction en question admet un extrémum local pour $x_j = x_{0,j}$. On obtient en définitive la condition nécessaire suivante d'un extrémum local d'une fonction de plusieurs variables : $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$ pour $x = x_0$, les égalités devant avoir lieu pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$. Dans la notation abrégée, cette condition s'écrit : $\mathrm{d}f(x_0) = 0$. Voyons maintenant quelles sont les conditions suffisantes d'un extrémum local. Nous allons supposer que la fonction $f(x)$ admet au point x_0 des dérivées partielles continues d'ordre deux. Pour déterminer le signe de l'accroissement $\Delta f(x_0)$ au point x_0 servons-nous de la formule de Taylor avec reste de Peano :

$$\Delta f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2), \qquad |\Delta x| \to 0.$$

Comme $\mathrm{d}f(x_0) = 0$ au point en lequel la fonction admet un extrémum, on a

$$\Delta f(x_0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\Delta x_i\,\Delta x_j + o(|\Delta x|^2), \qquad |\Delta x| \to 0.$$

Pour simplifier l'étude du problème, passons des variables x_i aux variables $\xi_i = \Delta x_i/|\Delta x|$ et $|\Delta x|$. Soit $\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\,\partial x_j} = a_{ij}$, alors

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \Delta f(x_0) = \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j + \alpha\right],$$

où $\alpha \to 0$ pour $|\Delta x| \to 0$. On a évidemment la relation $|\xi| = 1$, avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$.

En algèbre linéaire, l'expression $\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j$ pour $a_{ij} = a_{ji}$

s'appelle *forme quadratique* des variables ξ_i. Il est évident que pour des $|\Delta x|$ assez petits, le signe de $\Delta f(x_0)$ se définit, en règle générale, par celui de la forme quadratique $\varphi(\xi)$. Introduisons quelques définitions concernant la forme quadratique. La forme quadratique $\varphi(\xi) = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}\xi_i\xi_j$ est dite :

1) *définie positive* si $\varphi(\xi) > 0$ pour $|\xi| \neq 0$;

2) *définie négative* si $\varphi(\xi) < 0$ pour $|\xi| \neq 0$;

3) *semi-définie* si $\varphi(\xi)$ est une forme quadratique définie positive ou négative ;

4) *quasi semi-définie* si $\varphi(\xi)$ prend ou bien des valeurs positives, ou bien des valeurs négatives ;

5) *semi-indéfinie* si $\varphi(\xi)$ peut prendre pour $|\xi| \neq 0$ des valeurs aussi bien positives que négatives.

Théorème. *Supposons que la fonction $f(x)$ admet des dérivées partielles continues d'ordre deux dans un certain voisinage du point x_0, de plus* $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0$. *Si la différentielle seconde en x_0*

$$\mathrm{d}^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$$

est une forme quadratique définie positive ou définie négative des différentielles des variables indépendantes, alors le point x_0 est un point de minimum (resp. *de maximum*) *local de la fonction $f(x)$. Si $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ est une forme quadratique semi-indéfinie, alors la fonction $f(x)$ n'admet pas au point x_0 d'extrémum local.*

☐ L'accroissement de la fonction $f(x)$ au point x_0 est donné par l'expression

$$\Delta f(x_0) = \frac{|\Delta x|^2}{2}\,[\varphi(\xi) + \alpha],$$

où $\alpha \to 0$ pour $|\Delta x| \to 0$, $\xi_i = \Delta x_i / |\Delta x|$,

$$|\xi| = 1, \quad \varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\, \partial x_j}.$$

On montre que $\varphi(\xi) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{|\Delta x|^2}$, puisque $\Delta x_i = \mathrm{d}x_i$. Pour cette raison, le fait que la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ en différentielles $\mathrm{d}x_i$ soit définie positive, définie négative ou semi-indéfinie entraîne la propriété d'être défi-

nie positive, négative ou semi-indéfinie pour la forme quadratique $\varphi(\xi)$ en les variables ξ_i. A la forme quadratique $\varphi(\xi)$ il faut imposer la condition supplémentaire $|\xi| = 1$.

L'ensemble des points vérifiant l'égalité $|\xi| = 1$ est fermé ; par conséquent, la fonction continue $\varphi(\xi)$ atteint sur cet ensemble ses valeurs maximale et minimale : $\varphi(\xi') = \sup_{|\xi|=1} \varphi(\xi)$, $\varphi(\xi'') = \inf_{|\xi|=1} \varphi(\xi)$. Commençons par le cas où $\varphi(\xi)$ est une forme quadratique définie positive et donc $\varphi(\xi'') > 0$. Choisissons $|\Delta x|$ assez petit pour que l'on ait $|\alpha| < (1/2)\varphi(\xi'')$ pour $|\Delta x| < \delta$. On a alors

$$\Delta f(x_0) = \frac{|\Delta x|^2}{2} [\varphi(\xi) + \alpha] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|\Delta x|^2}{2} \left[\varphi(\xi'') - \frac{1}{2}\varphi(\xi'')\right] = \frac{|\Delta x|^2}{4} \varphi(\xi'') > 0$$

pour $0 < |\Delta x| < \delta$, c'est-à-dire que le point x_0 est un point de minimum local. Le cas où $\varphi(\xi)$ est une forme quadratique définie négative se traite de façon analogue. Soit maintenant $\varphi(\xi)$ une forme quadratique semi-indéfinie. On a alors $\varphi(\xi') > 0$, $\varphi(\xi'') < 0$. Pour des $|\Delta x|$ suffisamment petits, on a pour $\xi = \xi'$

$$\Delta f(x_0) = \frac{|\Delta x|^2}{2} [\varphi(\xi') + \alpha] > 0,$$

et pour $\xi = \xi''$

$$\Delta f(x_0) = \frac{|\Delta x|^2}{2} [\varphi(\xi'') + \alpha] < 0,$$

c'est-à-dire que $\Delta f(x)$ peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives dans tout voisinage suffisamment petit du point x_0. On en déduit que x_0 ne pas être point d'extrémum local. ■

Signalons que le cas où $d^2 f(x_0)$ est une forme quadratique quasi semi-définie nécessite une étude supplémentaire.

Voyons quelles sont les conditions suffisantes pour qu'une forme quadratique soit semi-définie ou semi-indéfinie. Soit la forme quadratique de deux variables

$$\varphi(\xi) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2.$$

Pour $a_{11} \neq 0$ on a

$$\varphi(\xi) = a_{11}\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\xi_2^2.$$

On voit de cette expression que pour $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ la forme quadrati-

que est semi-définie, étant définie positive pour $a_{11} > 0$ et définie négative pour $a_{11} < 0$.

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, la forme quadratique est semi-indéfinie. On peut montrer que cette assertion est également vraie pour $a_{11} = 0$. Donc, une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ admet au point (x_0, y_0) un maximum si l'on a en ce point $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]^2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$; pour $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ le point $x_0 = y_0$ est un point de minimum, tandis que pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0$ le point (x_0, y_0) ne sera pas point d'extrémum.

Dans les cours traditionnels d'algèbre linéaire (voir, par exemple, G. Acher, G. Gardelle, *Algèbre linéaire,* Dunod, 1983) sont mentionnés les critères suffisants suivants pour qu'une forme quadratique de plusieurs variables soit semi-définie (*critère de Sylvester*) : la forme quadratique

$$\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

est définie positive si tous les mineurs principaux $A_1, A_2, \ldots$ de la matrice $A = \|a_{ij}\|$ sont > 0. Ici

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

Si, par contre, on a $(-1)^i A_i < 0$, la forme quadratique est définie négative. Le critère de Sylvester permet également d'établir les conditions suffisantes du minimum (du maximum) d'une fonction de plusieurs variables.

•

§ 8. Extrémum lié d'une fonction de plusieurs variables

Traitons la question de l'extrémum d'une fonction $f(x, y)$ de $m + n$ variables, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, supposant ces variables soumises en plus à n équations de liaison $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Définition. On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de $n + m$ variables admet au point (x_0, y_0) vérifiant les conditions de liaison $F_i(x_0, y_0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, un *maximum* (resp. un *minimum*) *relatif* si l'inégalité $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$) a lieu dans un voisinage du

point (x_0, y_0) pour tous les points (x, y) vérifiant les équations de liaison $F_i(x, y) = 0$.

Cherchons les conditions suffisantes d'un extrémum lié de la fonction $f(x, y)$ au point (x_0, y_0). Supposons qu'au voisinage du point (x_0, y_0) les fonctions $F_i(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues d'ordre un, le jacobien Det $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\|$ étant non nul en ce point. Alors dans un certain voisinage du point (x_0, y_0) on peut déterminer les fonctions implicites $y_i = \varphi_i(x)$ à partir du système d'équations $F_i(x, y) = 0$. En portant les valeurs trouvées des y_i dans la fonction $f(x, y)$, on réduit le problème à la question de savoir si existe un extrémum de la fonction des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Un tel procédé de recherche des points d'extrémum présente certains inconvénients : la résolution du système d'équations $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est une tâche ardue ; le problème n'est plus symétrique par rapport aux variables x et y. On simplifie quelque peu le problème en considérant les différentielles des fonctions $f(x, y)$ et $F_i(x, y)$. Egalons à zéro la différentielle de la fonction $f(x, y)$ au point (x_0, y_0), tout en tenant compte du fait que les variables $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont des fonctions des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$:

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j = 0.$$

Les différentielles $\mathrm{d}y_j$ sont des fonctions des différentielles $\mathrm{d}x_k$. Pour chercher le lien qui existe entre ces deux différentielles servons-nous des équations de liaison $F_i(x, y) = 0$. Nous avons

$$\mathrm{d}F_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0, y = y_0.$$

Résolvant ces équations par rapport aux différentielles $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$ $\left(\text{ce qui est toujours possible grâce au fait que Det } \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0\right)$ et portant les valeurs trouvées dans les expressions de la différentielle $\mathrm{d}f$, on obtient les égalités de la forme $\sum_{k=1}^{m} A_k \mathrm{d}x_k = 0$. Se basant sur l'indépendance de variation des différentielles $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m$, on en tire que les conditions nécessaires d'existence d'un extrémum sont de la forme : $A_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Le procédé exposé de recherche des conditions nécessaires d'un extrémum

lié de la fonction $f(x, y)$ est dépourvu de la symétrie par rapport aux variables x et y.

Passons à une méthode de recherche des conditions nécessaires d'un extrémum lié préservant la symétrie par rapport aux variables x et y. Elle s'appelle ***méthode des multiplicateurs de Lagrange***. Multiplions les égalités pour les différentielles dF_i par un certain facteur λ_i et additionnons les expressions de df et $\lambda_i dF_i$. Nous obtenons en définitive qu'au point (x_0, y_0) d'un extrémum local, où $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}), y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0l})$, ont lieu les égalités

$$df + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dF_i = d\Phi = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} dy_j = 0,$$

où $\Phi = \Phi(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y)$. Choisissons les multiplicateurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ à partir des conditions $\partial\Phi/\partial y_j = 0$, c'est-à-dire à partir des équations

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = 0.$$

Ces équations sont résolubles par rapport aux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, puisque $\operatorname{Det} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0$ pour $x = x_0, y = y_0$. Avec les valeurs choisies des multiplicateurs λ_i on arrive aux égalités

$$df + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dF_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

Les différentielles $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ étant indépendantes, on tire de ces égalités que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0$. Les conditions nécessaires d'un extrémum local lié de la fonction $f(x, y)$ en présence des liaisons $F_i(x, y) = 0$ s'obtiennent de la façon suivante : on considère une fonction de Lagrange $\Phi(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y)$, où λ_i sont des constantes ; les conditions nécessaires d'un extrémum local de la fonction $\Phi(x, y)$ sont comme d'ordi-

naire les suivantes :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \; ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pour déterminer les multiplicateurs λ_i on ajoute à ces conditions les équations de liaison $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. On obtient au total $2n + m$ équations pour chercher les $2n + m$ inconnues $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Les conditions obtenues sont symétriques vis-à-vis des variables x et y. Par conséquent, on peut remplacer dans la condition $\operatorname{Det} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0$ les variables $(y_1, \ldots, y_n)$ par n'importe quelles variables n choisies dans les collections $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, c'est-à-dire qu'il suffit de considérer que les fonctions $F_i(x, y)$ sont indépendantes.

Voyons quelles sont les conditions suffisantes d'un extrémum lié. Nous allons considérer que les conditions nécessaires d'un extrémum lié sont remplies au point (x_0, y_0). Supposons qu'au voisinage du point (x_0, y_0) les fonctions $f(x, y)$ et $F_i(x, y)$ admettent des dérivées partielles continues d'ordre deux. Servons-nous des conditions suffisantes d'un maximum (d'un minimum) local d'une fonction de plusieurs variables $f(x)$ au point $x = x_0$: la différentielle première $\mathrm{d}f(x_0) = 0$, et la différentielle seconde $\mathrm{d}^2 f(x_0) < 0$ (resp. $\mathrm{d}^2 f(x_0) > 0$) si l'une au moins des différentielles $\mathrm{d}x_j \neq 0$. Si l'on veut chercher les conditions suffisantes d'un maximum (resp. d'un minimum) lié de la fonction $f(x, y)$ en présence des conditions de liaison $F_i(x, y) = 0$, on peut procéder comme suit : on détermine les fonctions implicites $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, à partir des équations $F_i(x, y) = 0$; la fonction $f(x, y)$ devient alors, après substitution des valeurs obtenues $(y_1, \ldots, y_n)$, une fonction des variables $(x_1, \ldots, x_m)$. Reste à appliquer les conditions suffisantes d'un maximum (d'un minimum) local d'une fonction de m variables. Comme $F_i(x, y) = 0$, on a $\mathrm{d}^2 F_i(x_0, y_0) = 0$ et donc $\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) = \mathrm{d}^2 \Phi(x_0, y_0)$, où $\Phi(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y)$ est une fonction de Lagrange.

Nous allons considérer que les conditions nécessaires d'un extrémum lié sont remplies. On a alors

$$\mathrm{d}^2\Phi = \mathrm{d}[\mathrm{d}\Phi] = \mathrm{d}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k\,\partial x_l}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_l + 2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k\,\partial y_j}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}y_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_j \, \partial y_p} \, \mathrm{d}y_j \, \mathrm{d}y_p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \, \mathrm{d}^2 y_j .$$

Au point d'extrémum (x_0, y_0) le dernier terme disparaît puisque $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(x_0, y_0) = 0$. On voit donc qu'au point d'extrémum la différentielle $\mathrm{d}^2\Phi(x_0, y_0)$ s'exprime par la même formule que dans l'hypothèse que les variables x et y sont indépendantes.

Ainsi donc

$$\mathrm{d}^2\Phi(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0)}{\partial x_k \, \partial x_l} \, \mathrm{d}x_k \, \mathrm{d}x_l +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0)}{\partial x_k \, \partial y_j} \, \mathrm{d}x_k \, \mathrm{d}y_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0)}{\partial y_j \, \partial y_p} \, \mathrm{d}y_j \, \mathrm{d}y_p ,$$

c'est-à-dire que l'expression $\mathrm{d}^2\Phi(x_0, y_0)$ est une forme quadratique par rapport aux différentielles $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m$; $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$. Si cette forme quadratique est définie positive ou définie négative, alors le point (x_0, y_0) est un point de minimum (resp. de maximum) local de la fonction $f(x, y)$ pour des conditions de liaison supplémentaires $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Si la forme quadratique de $\mathrm{d}^2\Phi(x_0, y_0)$ n'est ni définie positive, ni définie négative, une étude supplémentaire s'impose. Exprimons les différentielles $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$ par les différentielles $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m$ en nous servant des relations $\mathrm{d}F_i(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire des relations

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \, \mathrm{d}x_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \, \mathrm{d}y_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Ces relations découlent des équations de liaison $F_i(x, y) = 0$.) Portant les valeurs trouvées des différentielles $\mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n$ dans l'expression de $\mathrm{d}^2\Phi(x_0, y_0)$, on s'aperçoit que cette dernière expression devient la forme quadratique par rapport aux différentielles $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m$. Si cette forme est définie positive ou définie négative, le point (x_0, y_0) est un point de minimum (resp. de maximum) relatif de la fonction $f(x, y)$ pour des conditions de liaison supplémentaires $F_i(x, y) = 0$; si la forme est semi-indéfinie, le point (x_0, y_0) n'est pas un point d'extrémum local de la fonction $f(x, y)$.

Exemple. Etudier la fonction $z = x + y$; dire si elle admet un extrémum lié sous la condition $xy - 1 = 0$.

1er procédé. Comme $xy = 1$, on a $y = 1/x$ et $z = x + 1/x$. D'où on

déduit qu'aux points d'extrémum $z' = 1 - 1/x^2 = 0$, donc $x = 1$, $y = 1$ et $x = -1, y = -1$ sont des points d'extrémum. Le point $(1, 1)$ est un point de minimum puisque dans ce point on a $z'' = 2/x^3 > 0$; le point $(-1, -1)$ est un point de maximum, car $z'' < 0$.

2e procédé. Composons la fonction de Lagrange :

$$\Phi(x, y) = x + y + \lambda(xy - 1).$$

Les points d'extrémum se définissent à partir des conditions $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, $xy = 1$, qui s'écrivent dans notre cas comme suit : $1 + \lambda y = 0$, $1 + \lambda x = 0$, $xy = 1$. On en tire $-\lambda = 1/y = 1/x$, $1/\lambda^2 = 1$, c.-à-d. $\lambda = \pm 1$. Les points d'extrémum sont $x = 1, y = 1$ et $x = -1, y = -1$. Calculons $d^2\Phi(x, y)$. On a $d^2\Phi = +2\lambda \, dx \, dy$. La forme quadratique est semi-indéfinie. Exprimons la différentielle dy moyennant dx à partir de l'équation de liaison $xy = 1$:

$$y \, dx + x \, dy = 0, \quad dy = -\frac{y}{x} dx = -dx.$$

On en déduit $d^2\Phi = -2\lambda \, dx^2$. Pour $\lambda = -1$ on a $d^2\Phi > 0$ et pour $\lambda = +1$, $d^2\Phi < 0$, c'est-à-dire que $(1, 1)$ est un point de minimum et $(-1, -1)$, un point de maximum.

Considérons à titre d'exemple d'application de la théorie de l'extrémum lié la question des plus grande et plus petite valeurs d'une fonction de plusieurs variables sur un ensemble borné fermé. Si une fonction continue $f(x)$ est donnée sur un ensemble borné fermé, elle atteint sur cet ensemble ses valeurs maximale et minimale. Pour connaître ces valeurs, il faut déterminer les extrémums locaux ou bien aux points intérieurs, ou bien aux points frontières, et comparer leurs valeurs (sont frontières les points dans tout voisinage desquels on trouve à la fois des points intérieurs à l'ensemble et des points qui lui sont extérieurs). La procédure de recherche d'extrémums locaux aux points intérieurs d'un ensemble, à condition d'imposer certaines restrictions à la fonction $f(x)$, a déjà été considérée. Montrons maintenant comment on trouve les extrémums locaux aux points frontières. Pour simplifier les raisonnements, bornons-nous au cas de trois variables. Soit une fonction $u = f(x, y, z)$ et supposons que la frontière du domaine de variation des variables x, y, z est donnée par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$; supposons aussi que les fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ admettent des dérivées partielles continues d'ordre deux. Le problème se réduit au suivant : chercher les points de maximum ou de minimum de la fonction $u = f(x, y, z)$ à la condition $\varphi(x, y, z) = 0$. C'est bien là un problème de recherche d'un extrémum lié.

Exercice. Déterminer la plus grande et la plus petite valeurs de la fonction $u = x + y + z$ sachant que $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

CHAPITRE 6

CALCUL INTÉGRAL DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

§ 1. Intégrale indéfinie

Soit $f(x)$ une fonction différentiable d'une variable. Nous savons déjà calculer la dérivée $f'(x)$. Posons le problème inverse : connaissant la fonction $f(x)$, la dérivée d'une fonction $F(x)$, $F'(x) = f(x)$, reconstituer la fonction $F(x)$. La fonction $F(x)$ s'appelle *fonction primitive* (ou *primitive* tout court) de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$ si en tout point de cet intervalle la fonction $F(x)$ est différentiable et $F'(x) = f(x)$. Au lieu de l'intervalle $]a, b[$ on peut considérer un intervalle semi-ouvert.

Exemple. La fonction $F(x) = (2x + 1)^2$ est pour $x \in]-\infty, \infty[$ une primitive de la fonction $f(x) = 4(2x + 1)$; la fonction $F(x) = \text{Arc} \sin x$ est une primitive de la fonction $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Posons la question de savoir si une fonction admet une primitive unique. Soient $F_1(x)$ et $F_2(x)$ deux primitives d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $]a, b[$. On a alors $F_1'(x) = f(x)$ et $F_2'(x) = f(x)$ sur $]a, b[$, donc $[F_2(x) - F_1(x)]' = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$ et la fonction $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$ est une constante : $F(x) = C$ et $F_2(x) = F_1(x) + C$. D'autre part, si C est une constante arbitraire et $F_1(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$, $F_1(x) + C$ est évidemment une autre primitive de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$. Ainsi donc, toutes les primitives de la fonction $f(x)$, $x \in]a, b[$, sont contenues parmi les fonctions de la forme $F_1(x) + C$, où C est une constante arbitraire.

L'ensemble des primitives de la fonction $f(x)$ porte le nom d'*intégrale indéfinie* de $f(x)$ et se note $\int f(x)\, dx$. Le signe $\int$ (somme) symbolise l'intégrale, l'expression $f(x)\, dx$ et la fonction $f(x)$ s'appellent respectivement expression et fonction à intégrer, ou expression et fonction sous le signe somme ou sous le signe d'intégration.

On écrira $\int f_1(x)\, dx = \int f_2(x)\, dx$ si des primitives correspondantes quelconques diffèrent d'une constante : $F_2(x) = F_1(x) + C$. La question d'existence des primitives sera traitée plus loin, pour le moment on se bornera à remarquer qu'une fonction $f(x)$ admet une primitive si $f(x)$ est une fonction continue.

Signalons les propriétés évidentes suivantes de l'intégrale indéfinie :

1° $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

2° $\int dF(x) = F(x) + C$.

3° $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx$.

En particulier, pour $c_1 = c, f_1(x) = f(x), f_2(x) = 0$ on a $\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$. Les propriétés indiquées découlent des propriétés correspondantes de la dérivée et de la définition de l'intégrale indéfinie.

On trouvera ci-bas une *table des intégrales indéfinies* de quelques fonctions élémentaires (la constante arbitraire est omise) :

1) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$. 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$.

3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$. 4) $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

5) $\int \cos x\,dx = \sin x$. 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$.

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arc\,sin} x, \\ -\operatorname{Arc\,cos} x. \end{cases}$

9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{Arc\,tg} x, \\ -\operatorname{Arc\,cotg} x. \end{cases}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}|$.

11) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 12) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$.

13) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$. 14) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$.

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x$.

L'intégrale d'une fonction élémentaire n'est pas toujours une fonction élémentaire ; en particulier, il est prouvé que $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ n'est pas une fonction élémentaire.

§ 2. Intégrale définie

La notion de primitive a été définie au § précédent d'une façon non constructive, uniquement à l'aide de l'opération inverse de la dérivation. Un des procédés constructifs de calcul de la primitive d'une fonction donnée $f(x)$ s'appuie sur la notion d'intégrale définie.

Supposons que la fonction $f(x)$ est donnée sur un intervalle fermé $[a, b], a < b$. Désignons par R la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ à l'aide des points distincts $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, où $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$, en n intervalles partiels $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \ldots, n - 1$, d'une longueur $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. La somme

$$S_R(\xi) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

porte le nom de *somme intégrale* de la fonction $f(x)$ correspondant à la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ et au choix donné des points ξ_i à l'intérieur des intervalles partiels.

Notons $\Delta = \max_i \Delta x_i$.

Définition. Le nombre S s'appelle *limite des sommes intégrales* lorsque $\Delta \to 0$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute subdivision R satisfaisant à la condition $\Delta < \delta$ et tout choix des points ξ_i sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ on a l'inégalité $|S_R(\xi) - S| < \varepsilon$ $\left(\text{notation : } S = \lim_{\Delta \to 0} S_R(\xi)\right)$.

Définition. La fonction $f(x)$ s'appelle *Riemann-intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$ si les sommes intégrales de cette fonction convergent lorsque $\Delta \to 0$ vers une limite finie S. Cette limite S s'appelle *intégrale définie* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ $\left(\text{notation : } S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Donnons l'interprétation géométrique de l'intégrale définie. Traçons le graphique de la fonction $f(x)$ et supposons que $f(x) > 0$ pour $x \in [a, b]$. La quantité $f(\xi_i)\Delta x_i$ est égale à l'aire du rectangle de côtés $f(\xi_i)$ et Δx_i. La somme $S_R(\xi_i)$ est donc égale à l'aire de la figure en escaliers composée de tels rectangles (cette figure est hachurée à la figure 10). En faisant tendre Δ vers 0, on trouve que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire de la figure cur-

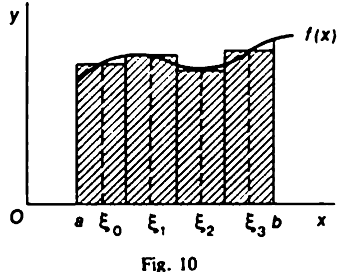


Fig. 10

viligne délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $y = f(x)$. Si l'on abandonne la restriction $f(x) > 0$, on peut toujours donner à l'intégrale définie la même interprétation en convenant supplémentairement de compter avec le signe moins la partie de l'aire de la figure curviligne située au-dessous de l'axe Oy.

Indiquons quelques conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité des fonctions.

Théorème. *Si une fonction $f(x)$ est intégrable sur un intervalle $[a, b]$, elle est bornée sur cet intervalle.*

□ Supposons que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et n'est pas bornée sur un intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, un élément de la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n - 1$. Soit $I_R(\xi)$ une partie de la somme intégrale $S_R(\xi)$, partie correspondant à tous les intervalles partiels de la subdivision R sauf l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. Alors $S_R(\xi) = I_R(\xi) + f(\xi_k)\Delta x_k$, où $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. La fonction $f(x)$ n'étant pas bornée sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on peut toujours choisir le point ξ_k de façon à satisfaire à l'inégalité $|f(\xi_k)\Delta x_k| > c + |I_R(\xi)|$ pour tout $c > 0$. On a dans ce cas

$$|S_R(\xi)| = |I_R(\xi) + f(\xi_k)\Delta x_k| \geqslant |f(\xi_k)\Delta x_k| - |I_R(\xi)| > c.$$

Le nombre c étant arbitraire, les sommes $S_R(\xi)$ ne peuvent pas converger vers une limite lorsque Δ tend vers 0. La contradiction obtenue démontre le théorème. ■

Nous avons formulé la condition nécessaire d'intégrabilité des fonctions. Pour énoncer les conditions suffisantes, nous aurons besoin de la notion de *somme de Darboux.*

§ 3. Sommes de Darboux. Intégrales de Darboux

Si dans l'expression de la somme intégrale on remplace $f(\xi_i)$, $\xi_i \in$ $\in [x_i, x_{i+1}]$, par $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ ou $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, on obtient les

sommes de Darboux supérieure et inférieure respectivement

$$\bar{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \, \Delta x_i, \quad \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \Delta x_i.$$

Comme $\Delta x_i > 0$ et $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$, alors $S_R \leqslant S_R(\xi) \leqslant \bar{S}_R$. Si les sommes $\underline{S}_R$ et $\bar{S}_R$ convergent pour $\Delta \to 0$ vers des limites égales, indépendantes de la subdivision R, alors la dernière inégalité, le théorème de comparaison des limites aidant, permet d'affirmer que les sommes intégrales convergent vers une certaine limite S. Montrons que la condition d'existence et d'égalité ds limites $\lim_{\Delta \to 0} \underline{S}_R$ et $\lim_{\Delta \to 0} \bar{S}_R$ peut être remplacée par une condition plus faible d'existence et de nullité de la limite $\lim_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R)$. Introduisons quelques notations utiles.

Soient R_1 et R_2 deux subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. Si R_2 s'obtient à partir de R_1 par l'adjonction de nouveaux points de division, on écrira ce fait comme $R_1 \subset R_2$. Soient maintenant R_1 et R_2 deux subdivisions quelconques de l'intervalle $[a, b]$. On dira d'une subdivision R_3 qu'elle est ***réunion*** des subdivisions R_1 et R_2 si l'ensemble des points de division de R_3 est la réunion des points de division de R_1 et R_2 (notation : $R_3 = R_1 + R_2$). Il est évident que $R_1 \subset R_3$, $R_2 \subset R_3$. Suivons le comportement des sommes de Darboux au changement de subdivision.

Théorème. *Les sommes de Darboux possèdent les propriétés suivantes :*

1) *si* $R_1 \subset R_2$, *alors* $\bar{S}_{R_1} \geqslant \bar{S}_{R_2}$, $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_2}$;

2) $\underline{S}_{R_1} \leqslant \bar{S}_{R_2}$ *pour des subdivisions* R_1 *et* R_2 *arbitraires.*

□ 1. Bornons-nous au cas où la subdivision R_2 s'obtient de la subdivision R_1 par l'adjonction d'un seul point $\bar{x}$ dans l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ (le cas général s'en déduit par répétition de la procédure mentionnée plusieurs fois). Tous les termes de la somme $\bar{S}_{R_1}$ seront inchangés par introduction de ce point supplémentaire, sauf le terme $M_k(x_{k+1} - x_k)$ qui sera remplacé par la somme $M_k'(\bar{x} - x_k) + M_k''(x_{k+1} - \bar{x})$, où $M_k' = \sup_{x \in [x_k, \bar{x}]} f(x)$, $M_k'' = \sup_{x \in [\bar{x}, x_{k+1}]} f(x)$. Comme $M_k' \leqslant M_k$, $M_k'' \leqslant M_k$, on a $M_k'(\bar{x} - x_k) + M_k''(x_{k+1} - \bar{x}) \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k)$ et donc $\bar{S}_{R_2} \leqslant \bar{S}_{R_1}$. La démonstration dans le cas des sommes de Darboux inférieures est parfaitement analogue.

2. Soient R_1 et R_2 deux subdivisions arbitraires de l'intervalle $[a, b]$ et $R_3 = R_1 + R_2$. Puisque $R_1 \subset R_3$, $R_2 \subset R_3$, on a $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_3} \leqslant \bar{S}_{R_3} \leqslant \bar{S}_{R_2}$. Nous avons utilisé le fait que pour une même subdivision la somme de Darboux inférieure ne dépasse jamais la somme supérieure (puisque $m_i \leqslant M_i$). ■

Ainsi donc, toutes les sommes de Darboux supérieures sont bornées inférieurement, ou minorées, et toutes les sommes de Darboux inférieures sont bornées supérieurement, ou majorées. Il existe donc la borne inférieure $\inf\limits_R \overline{S}_R = \overline{S}$ et la borne supérieure $\sup\limits_R \underline{S}_R = \underline{S}$. Les quantités $\overline{S}$ et $\underline{S}$ s'appellent respectivement *intégrale supérieure* et *intégrale inférieure de Darboux* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. Pour toutes subdivisions R_1 et R_2 de l'intervalle $[a, b]$, il découle de la définition des intégrales de Darboux et de l'inégalité $\overline{S}_{R_1} \geqslant \underline{S}_{R_2}$ les inégalités suivantes : $\overline{S}_{R_1} \geqslant \overline{S} \geqslant \geqslant \underline{S} \geqslant \underline{S}_{R_2}$ (cf. la fin du § 3, chap. 1).

§ 4. Conditions d'intégrabilité des fonctions

Voyons quelles sont les conditions d'intégrabilité des fonctions.

Théorème. *Pour qu'une fonction $f(x)$ bornée sur un intervalle $[a, b]$ soit intégrable sur cet intervalle il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $0 \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$, si $\Delta < \delta$ indépendamment de la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$* $\left(\Delta = \max\limits_i \Delta x_i\right)$, ou, en abrégé :

$$\lim_{\Delta \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0.$$

□ *Nécessité.* Supposons que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Cela veut dire que, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que $|S_R(\xi) - S| < \varepsilon_1$ si $\Delta < \delta$ quel que soit le choix des points ξ_i $\left(\text{ici } S = \int\limits_a^b f(x)\,dx\right)$. En choisissant les points ξ_i de deux façons différentes : $\xi_i = \tilde{\xi}_i$ et $\xi_i = \bar{\xi}_i$, on a

$$|S_R(\tilde{\xi}) - S_R(\bar{\xi})| = |[S_R(\tilde{\xi}) - S] + [S - S_R(\bar{\xi})]| \leqslant$$
$$\leqslant |S_R(\tilde{\xi}) - S| + |S_R(\bar{\xi}) - S| < 2\varepsilon_1 \text{ si } \Delta < \delta.$$

Puisque $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, il doit exister sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ des points $\tilde{\xi}_i$ et $\bar{\xi}_i$ tels que $M_i - f(\tilde{\xi}_i) < \varepsilon_1$, $f(\bar{\xi}_i) - m_i < \varepsilon_1$. Avec ce choix des points $\tilde{\xi}_i$ et $\bar{\xi}_i$ on a

$$\overline{S}_R - S_R(\tilde{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\tilde{\xi}_i)]\Delta x_i < \varepsilon_1(b - a),$$

$$S_R(\bar{\xi}) - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\bar{\xi}_i) - m_i]\Delta x_i < \varepsilon_1(b - a),$$

d'où

$$0 \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R = [\bar{S}_R - S_R(\tilde{\xi})] + [S_R(\bar{\xi}) - \underline{S}_R] +$$
$$+ [S_R(\tilde{\xi}) - S_R(\bar{\xi})] < \varepsilon_1(b - a) + \varepsilon_1(b - a) + 2\varepsilon_1 =$$
$$= \varepsilon_1[2 + 2(b - a)].$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Choisissons ε_1 à partir de la condition $\varepsilon_1[2 + 2(b - a)] = \varepsilon$. On a alors $0 \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$ pour $\Delta < \delta$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

Suffisance. Soit $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$. Comme $\underline{S}_R \leqslant \underline{S} \leqslant \bar{S} \leqslant \bar{S}_R$, on a $\bar{S} - \underline{S} \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R$ ($\bar{S}$ et $\underline{S}$ sont respectivement les intégrales de Darboux supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$). Le second membre de l'inégalité tend vers zéro lorsque $\Delta \to 0$, tandis que le premier membre ne dépend pas de Δ, donc $\bar{S} = \underline{S} = S$ (S est la notation commune à $\bar{S}$ et $\underline{S}$). Considérons la quantité $|S_R(\xi) - S|$, où $S_R(\xi)$ est la somme intégrale. Puisque $\underline{S}_R \leqslant S_R(\xi) \leqslant \bar{S}_R$ et $\underline{S}_R \leqslant S \leqslant \bar{S}_R$, on a $|S_R(\xi) - S| \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R$. Mais $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et toute subdivision R de l'intervalle $[a, b]$, il existe un nombre $\delta = \delta(\xi)$ tel que pour $\Delta < \delta$ soit satisfaite l'inégalité $0 \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$. Mais dans ce cas on a pour $\Delta < \delta$, $|S_R(\xi) - S| \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\Delta \to 0} S_R(\xi) = S$. ■

Remarque. La condition $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ admet une écriture plus commode. Soit

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x' \in [x_i, x_{i+1}]} f(x') =$$
$$= \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} [f(x) - f(x')].$$

En intervertissant dans cette expression x et x', on trouve $\omega_i = \sup\limits_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} [f(x') - f(x)]$. Comme $|f(x) - f(x')| = \max\{[f(x) - f(x')], [f(x') - f(x)]\}$, on peut obtenir pour ω_i une expression plus symétrique :

$$\omega_i = \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(x')|.$$

La quantité ω_i s'appelle *oscillation de la fonction* $f(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

L'égalité $\lim_{\Delta\to 0}(\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ est équivalente à la suivante : $\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0.$

Arrêtons-nous sur les corollaires du théorème que nous venons de démontrer.

Corollaires : 1. *Une fonction $f(x)$ intégrable sur un intervalle $[a, b]$ l'est sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$.*

2. *Si la fonction $f(x)$ est intégrable sur un intervalle $[a, b]$, la fonction $|f(x)|$ est également intégrable sur cet intervalle.*

3. *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$, alors sont également intégrables sur cet intervalle les fonctions $c_1f(x) + c_2g(x)$ (c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires), $f(x)g(x)$ et aussi la fonction $f(x)/g(x)$ sous la condition supplémentaire $|g(x)| \geqslant k > 0$.*

□ **1.** Soient R' une subdivision arbitraire de l'intervalle $[c, d] \subset \subset [a, b]$, et $\overline{S}_{R'}$ et $\underline{S}_{R'}$ les sommes de Darboux supérieure et inférieure pour la subdivision R'. Complétons la subdivision R' de l'intervalle $[c, d]$ en une certaine subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ en ajoutant des points de division supplémentaires hors de l'intervalle $[c, d]$ de façon que la longueur maximale Δ des intervalles partiels sur $[a, b]$ ne dépasse pas la longueur maximale des intervalles partiels sur $[c, d]$.

Soient $\overline{S}_R$ et $\underline{S}_R$ les sommes de Darboux supérieure et inférieure pour la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$. L'expression de $\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$ diffère de l'expression analogue correspondante de $\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}$ par des termes supplémentaires du type $\omega_i\Delta x_i$ relatifs aux intervalles partiels extérieurs à $[c, d]$. Comme $\omega_i \geqslant 0$, $\Delta x_i > 0$, on en tire $0 \leqslant \overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R$. La fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, donc $\lim_{\Delta\to 0}(\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ et l'on déduit de l'inégalité précédente que la condition d'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[c, d]$ est remplie :

$$\lim_{\Delta\to 0}(\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}) = 0.$$

2. Soit ω_i l'oscillation de la fonction $f(x)$ sur un intervalle partiel $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$. Majorons l'oscillation $\overline{\omega}_i$ de la fonction $|f(x)|$ sur cet intervalle. Comme $||f(x)| - |f(x')|| \leqslant |f(x) - f(x')|$ pour $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$, on a $\overline{\omega}_i \leqslant \omega_i$. Donc de la condition

d'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$$

découle celle d'intégrabilité de la fonction $|f(x)|$ sur le même intervalle $[a, b]$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\omega}_i\Delta x_i = 0.$$

3. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et $\omega_i, \bar{\omega}_i$ les oscillations des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sur l'intervalle partiel $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$. Majorons les oscillations $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}$ des fonctions $c_1f(x) + c_2g(x), f(x)g(x)$ et $f(x)/g(x)$.

Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|, \bar{M} = \sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|, k = \inf\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Alors pour $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$ on a

a) $$|[c_1f(x) + c_2g(x)] - [c_1f(x') + c_2g(x')]| = |c_1[f(x) - f(x')] + c_2[g(x) - g(x')]| \leqslant |c_1||f(x) - f(x')| + |c_2||g(x) - g(x')| \leqslant |c_1|\omega_i + |c_2|\bar{\omega}_i;$$

b) $$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)[g(x) - g(x')] + g(x')[f(x) - f(x')]| \leqslant M\bar{\omega}_i + \bar{M}\omega_i;$$

c) $$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x')}{g(x')}\right| = \left|\frac{f(x)[g(x') - g(x)]}{g(x)g(x')} + \frac{[f(x) - f(x')]}{g(x')}\right| \leqslant \frac{M}{k^2}\bar{\omega}_i + \frac{1}{k}\omega_i.$$

D'où $\omega_i^{(1)} \leqslant |c_1|\omega_i + |c_2|\bar{\omega}_i, \omega_i^{(2)} \leqslant M\bar{\omega}_i + \bar{M}\omega_i, \quad \omega_i^{(3)} \leqslant \frac{M}{k^2}\bar{\omega}_i + \frac{1}{k}\omega_i$.

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ étant intégrables, on a

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\omega}_i\Delta x_i = 0,$$

de sorte qu'on a les conditions d'intégrabilité, pour $k > 0$,

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^{(1)}\Delta x_i = 0, \quad \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^{(2)}\Delta x_i = 0,$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(3)} \Delta x_i = 0$$

pour les fonctions $c_1 f(x) + c_2 g(x)$, $f(x)g(x)$ et $f(x)/g(x)$. ■

Cernons maintenant les classes de fonctions satisfaisant aux conditions d'intégrabilité sur l'intervalle $[a, b]$.

Théorème. *Soit une fonction $f(x)$ bornée sur l'intervalle $[a, b]$ et supposons que pour tout $\delta_0 > 0$ il existe un nombre fini d'intervalles renfermant tous les points de discontinuité de la fonction $f(x)$ et d'une longueur sommaire inférieure à δ_0. La fonction $f(x)$ est alors intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.*

□ Supposons que pour un δ_0 fixe on peut recouvrir tous les points de discontinuité de la fonction $f(x)$ par $l = l(\delta_0)$ intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à δ_0. Enlevons ces intervalles de l'intervalle $[a, b]$. Il ne reste pas plus de $l + 1$ intervalles $[a_k, b_k]$, $0 \leqslant k \leqslant l$. La totalité des intervalles $[a_k, b_k]$ constitue un ensemble numérique fermé, notons-le F. La fonction $f(x)$ étant continue sur cet ensemble, elle y est uniformément continue, et pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon_1$ si $x, x' \in F$ et $|x - x'| < \delta$. Considérons une subdivision arbitraire R de l'intervalle $[a, b]$. On peut partager les intervalles partiels en deux groupes selon qu'ils présentent ou non au moins un point commun avec les intervalles enlevés. Si la longueur de l'intervalle partiel ne dépasse pas Δ, la longueur sommaire des intervalles du premier groupe n'est pas supérieure à $\delta_0 + 2l\Delta$ (à la longueur de chaque intervalle sont ajoutées les longueurs des deux intervalles fermés adjacents à cet intervalle). On a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i .$$

Le premier et le second termes traduisent respectivement les intervalles du premier et du deuxième groupe (ω_i est l'oscillation de la fonction $f(x)$ à l'intérieur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$).

Montrons que la condition d'intégrabilité des fonctions $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i =$ $= 0$ est remplie. La quantité ω_i peut s'avérer non négligeable pour le premier groupe de termes lorsque $\Delta \to 0$, car la fonction $f(x)$ est susceptible de subir des discontinuités aux intervalles respectifs. Cherchons une estimation, ne serait-ce que grossière, de la quantité ω_i du premier groupe. On a $|f(x)| \leqslant M$, M est une constante, puisque la fonction $f(x)$ est bornée. On peut écrire

$$\omega_i = \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(x')| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} [|f(x)| + |f(x')|] \leqslant 2M$$

et, par suite,

$$\sum_i{}' \omega_i \Delta x_i \leqslant 2M \sum{}' \Delta x_i \leqslant 2M(\delta_0 + 2l\Delta).$$

Pour les intervalles du deuxième groupe, l'inégalité $|f(x) - f(x')| < \varepsilon_1$ à l'appui pour $|x - x'| < \delta(\varepsilon_1)$, on a $\omega_i \leqslant \varepsilon_1$ si $\Delta < \delta$, d'où $\sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_1 \sum_i{}'' \Delta x_i \leqslant \varepsilon_1 (b - a)$ pour $\Delta < \delta$ $\left(\Delta = \max_i \Delta x_i\right)$. Ainsi donc, pour $\Delta < \delta$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant 2M(\delta_0 + 2l\delta) + \varepsilon_1 (b - a).$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Choisissons les nombres δ_0 et ε_1 à partir de la condition $4M\delta_0 < \varepsilon/2$, $\varepsilon_1(b - a) < \varepsilon/2$. Pour δ_0 et ε_1 fixes, choisissons un δ assez petit pour que soit remplie l'inégalité $2l\delta < \delta_0$. On a alors pour $\Delta < \delta$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant 2M(\delta_0 + 2l\delta) + \varepsilon_1 (b - a) < 4M\delta_0 + \varepsilon_1 (b - a) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ satisfait la condition d'intégrabilité dans l'intervalle $[a, b]$. ■

Un cas particulier des fonctions justiciables des hypothèses du théorème que nous venons de démontrer sont les fonctions *continues par morceaux*, c'est-à-dire les fonctions bornées, continues sur l'intervalle $[a, b]$, sauf un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. Ainsi donc, les fonctions continues et continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ y sont intégrables.

Il découle du théorème ci-dessus et de la définition de l'intégrale définie que la variation des valeurs de la fonction $f(x)$ en un nombre fini de points n'a aucune influence sur l'intégrabilité de la fonction, ni sur la valeur de l'intégrale (vérifier à titre d'exercice).

§ 5. Propriétés principales de l'intégrale définie

Toutes les fonctions considérées dans ce paragraphe seront supposées intégrables dans l'intervalle $[a, b]$. Posons en outre

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ pour } a > b.$$

Théorème. *L'intégrale définie possède les propriétés suivantes :*

1° $\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$

(c_1, c_2 *sont des constantes*).

En posant, en particulier, $c_1 = c$, $g(x) = 0$, on a

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

2° $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

3° *Si* $f(x) \geqslant g(x)$ *pour* $x \in [a, b]$, *alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx \text{ pour } a < b.$$

4° *Si* $g(x) \geqslant 0$ *sur l'intervalle* $[a, b]$, *alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

où $m \leqslant \mu \leqslant M$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

La dernière relation est dite *formule de la moyenne* pour l'intégrale définie. Pour $g(x) \equiv 1$ la formule de la moyenne devient particulièrement simple :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b - a), \text{ où } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

□ 1° Cette propriété s'appelle *propriété de linéarité de l'intégrale définie* et découle de la propriété analogue des sommes intégrales et des propriétés de la limite.

2° Soient $c \in]a, b[$, $a < b$, R, une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Comptons le point c parmi les points de division de l'intervalle $[a, b]$. Nous avons pour les sommes intégrales

$$S_R(\xi) = S_R^{(1)}(\xi) + S_R^{(2)}(\xi).$$

La première et la seconde sommes sont celles des intervalles partiels faisant partie respectivement des intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. Passant à la limite

pour $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_i$), on trouve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Soit maintenant $c > b$. Alors, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

On en tire comme auparavant

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Mêmes raisonnements pour les autres situations réciproques des points a, b, c.

3° Posons $h(x) = f(x) - g(x)$. Comme $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$, on a $h(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle. Par conséquent, toutes les sommes intégrales de la fonction $h(x)$ sont positives pour $a < b$, d'où l'on trouve à la limite pour $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max\limits_i \Delta x_i$)

$$\int_a^b h(x)\,dx \geqslant 0, \text{ i.e. } \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4° Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $g(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, alors d'après la propriété de l'intégrale définie démontrée ci-dessus, on trouve pour $a < b$

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Supposons que $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, alors, pour

$$\mu = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx$$

on a les inégalités $m \leqslant \mu \leqslant M$. Ainsi donc

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx, \text{ où } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Cette relation a lieu également pour $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, puisque dans ce cas l'inégalité

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx$$

implique $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Nous avons démontré la formule de la moyenne pour $a < b$. Les égalités

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -\int_b^a f(x)g(x)\,dx, \qquad \int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx$$

permettent de l'étendre au cas $a > b$. ■

Remarques. 1. Mettant à profit le fait que la valeur de l'intégrale définie est invariante par la variation des valeurs de la fonction à intégrer en un nombre fini de points, on peut poser dans 4° $m = \inf_{x \in]a,\, b[} f(x)$, $M = \sup_{x \in]a,\, b[} f(x)$, et dans 3°, n'exiger l'accomplissement de l'inégalité $f(x) \geqslant g(x)$ que sur l'intervalle $]a, b[$.

2. Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend sur cet intervalle toute valeur μ comprise entre m et M. Par suite, la formule de la moyenne peut être écrite sous la forme

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \xi \in [a, b].$$

En particulier, pour $g(x) \equiv 1$, la formule s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \qquad \xi \in [a, b].$$

3. La propriété 3° permet d'obtenir la majoration utile suivante :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Pour la démonstration, servons-nous de l'inégalité $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant$

$\leqslant |f(x)|$. Pour $a < b$ nous obtenons

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \text{ i.e.}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Pour $a > b$, il suffit d'utiliser la relation

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

§ 6. Relation existant entre les intégrales indéfinie et définie

On fait ressortir le lien existant entre les notions d'intégrales indéfinie et définie en considérant la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dite *intégrale à borne supérieure variable.*

Théorème *Soit une fonction* $f(x)$ *intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$ *et soit* $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. *Alors la fonction* $F(x)$ *est continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *et admet aux points de continuité de* $f(x)$ *une dérivée égale à* $f(x)$.

□ La fonction $f(x)$ est bornée sur l'intervalle $[a, b]$, puisque intégrable, c'est-à-dire que $|f(x)| \leqslant M$, M est une constante. Majorons l'accroissement de la fonction $F(x)$:

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|\Delta x|,$$
$$x \in [a, b], \quad x + \Delta x \in [a, b].$$

La continuité de la fonction $F(x)$ en découle (cf. la remarque 3 au § 5).

Soit maintenant x un point de continuité de la fonction $f(x)$. Montrons qu'en ce point la fonction $F(x)$ admet une dérivée égale à $f(x)$. La fonction $f(x)$ étant continue, il existe au point considéré, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ si $|t - x| < \delta$. Par conséquent, on a pour

$|\Delta x| < \delta$

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x}[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t}{\Delta x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\int\limits_{x}^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t\right|}{|\Delta x|} \leqslant \frac{\varepsilon\left|\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\mathrm{d}t\right|}{|\Delta x|} = \varepsilon.$$

Ceci démontre précisément l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ égale à $f(x)$. ■

Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, il s'ensuit du théorème que sur cet intervalle la fonction $f(x)$ admet une primitive égale à $F(x)$.

Théorème fondamental du calcul intégral. *Soient* $f(x)$ *une fonction intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$ *et* $F(x)$ *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *et primitive de* $f(x)$ *sur* $]a, b[$. *Alors*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Cette relation porte le nom de *formule de Newton-Leibniz*. La différence $F(b) - F(a)$ se note parfois en abrégé $F(x)|_a^b$ et s'appelle substitution de la fonction $F(x)$ entre a et b.

□ Traitons d'abord le cas $b > a$. Considérons une subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ à l'aide des points $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Représentons la différence $F(b) - F(a)$ sous une forme équivalente. Comme

$$\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1}) - F(x_i)] = [F(x_1) - F(x_0)] +$$
$$+ [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] = F(x_n) - F(x_0),$$

on a $F(b) - F(a) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}[F(x_{i+1}) - F(x_i)]$.

La formule de Lagrange des accroissements finis de la fonction $F(x)$ nous donne

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

où $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. On a utilisé le fait que $F'(x) = f(x)$ sur $]a, b[$. Ainsi donc

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

La somme au second membre de cette égalité est la somme intégrale $S_R(\xi)$ de $f(x)$ correspondant à la subdivision R et à un certain choix des points ξ_i sur les intervalles partiels $[x_i, x_{i+1}]$. La fonction $f(x)$ étant intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, alors, quel que soit le choix des points ξ_i sur les intervalles partiels, la somme intégrale converge vers une limite

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \Delta = \max \Delta x_i.$$

On obtient à la limite l'égalité

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si $b < a$, il suffit d'utiliser l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

D'après ce qui a été démontré pour $a > b$, on a

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)\,;$$

donc, dans ce cas,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Exercice. Calculer la limite $I = \lim_{n \to \infty} I_n$, où $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^5}{n^6}$.

Nous voyons que le calcul d'une intégrale définie se ramène à celui d'une primitive de l'expression à intégrer ; il serait donc utile de se familiariser avec quelques techniques de calcul de l'intégrale indéfinie.

§ 7. Changement de variable (substitution) dans les intégrales indéfinie et définie. Intégration par parties

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ et supposons que pour $t \in [\alpha, \beta]$ la fonction $x = \varphi(t)$ prend ses valeurs dans $[a, b]$. Si la dérivée $\varphi'(t)$ existe, la formule de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'(x)|_{x=\varphi(t)}\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

La fonction $F[\varphi(t)]$ est donc une primitive de la fonction $f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)$ pour $t \in [\alpha, \beta]$, c'est-à-dire que

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C \quad \text{pour} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Or $F[\varphi(t)] + C = \int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)}$ et nous aboutissons à la formule suivante de changement de variables dans une intégrale indéfinie :

$$\int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Exemple. On a

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1 - t^2}\bigg|_{t=\sin x} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

Cherchons maintenant la formule de changement de variables dans une intégrale définie.

Théorème. *Soit une fonction $\varphi(t)$ admettant une dérivée continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et les valeurs de $\varphi(t)$ lorsque $t \in [\alpha, \beta]$ appartiennent à l'intervalle $[A, B]$, intervalle de continuité de la fonction $f(x)$. On a alors l'égalité*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

☐ Dans le cas des intégrales indéfinies, on a

$$\int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Si donc $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur l'intervalle $[A, B]$, la fonction $F[\varphi(t)]$ est une primitive de la fonction $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ pour $t \in [\alpha, \beta]$. La

formule de Newton-Leibniz nous donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons supposé qu'une fonction continue admet une primitive. Cette propriété découle de l'existence de l'intégrale définie $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ d'une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$ et de la relation $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Etablissons la *formule d'intégration par parties*. Prouvons la formule

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

en supposant que les deux membres de l'égalité ont un sens. Il suffit de calculer à cet effet l'intégrale indéfinie des deux membres de l'égalité :

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x).$$

Indiquons une écriture plus simple de la formule d'intégration par parties :

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x).$$

Remarque. L'intégration par parties est payante surtout lorsque la fonction à intégrer se laisse représenter sous la forme de deux facteurs dont l'un est ln (ax), Arc sin (ax), Arc cos (ax), Arc tg (ax). Si l'un des facteurs est une puissance entière des fonctions indiquées, on réitère la procédure d'intégration par parties autant de fois qu'il est nécessaire.

Exemple. Soit à calculer $\int x^m \ln x\,dx$. Posons dans la formule d'intégration par parties $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^m$. Alors $v(x) = x^{m+1}/(m + 1)$, d'où

$$\int x^m \ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

Etablissons la formule d'intégration par parties pour les intégrales définies.

Théorème. *Soient des fonctions $u(x)$, $v(x)$ admettant sur l'intervalle $[a, b]$ des dérivées intégrables $u'(x)$, $v'(x)$. On a*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

(*formule d'intégration par parties*).

□ Les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$, puisque par hypothèse, elles y admettent des dérivées. D'après la formule de Newton-Leibniz on a l'égalité équivalente à l'assertion du théorème

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx =$$

$$= \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \blacksquare$$

Exercice. Par double intégration par parties, calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 x^2[\ln^2 x + 5\ln x + 1]\,dx.$$

A titre d'exemple d'application de la formule d'intégration par parties, déduisons la formule de Taylor pour la fonction $f(x)$ admettant sur l'intervalle $[a, b]$ une dérivée intégrable d'ordre $n + 1$. On a

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Servons-nous de la formule d'intégration par parties en posant $u(t) = f'(t)$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t - x$:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(t)(t - x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t - x)\,dt.$$

Appliquant une seconde fois la formule d'intégration par parties et en posant $u(t) = f''(t)$, $v'(t) = t - x$, $v(t) = (t - x)^2/2$:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f'(t)(t - x)\Big|_a^x - f''(t)\frac{(t - x)^2}{2}\Big|_a^x +$$

$$+ \int_a^x f'''(t) \frac{(t-x)^2}{2} \, dt.$$

Poursuivant le processus d'intégration par parties, on trouve définitivement

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + R_n(x),$$

où

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n\,!} \, dt.$$

Cette expression est la formule de Taylor à reste représenté sous forme intégrale.

Exercice. De la représentation intégrale du reste de la formule de Taylor déduire sa représentation sous la forme de Lagrange.

Les formules de changement de variables et d'intégration par parties se généralisent aux fonctions continues par morceaux à condition de partager l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels dans chacun desquels sont remplies les conditions des théorèmes correspondants. On utilisera les formules du type

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx, \quad \text{où} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

ainsi que les formules correspondantes de changement de variables et d'intégration par parties pour chaque intégrale étendue sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

§ 8. Intégration des fonctions rationnelles

Les intégrales indéfinies les plus simples qui se laissent exprimer au moyen des fonctions élémentaires sont les intégrales des fonctions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions du type $R(x) = P(x)/Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

Simplifions préalablement l'expression $P(x)/Q(x)$. Si le degré du polynôme $P(x)$ est supérieur ou égal à celui de $Q(x)$ (la fonction rationnelle

considérée est une fraction irrégulière), nous divisons le polynôme $P(x)$ par $Q(x)$ d'après les règles de division des polynômes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}.$$

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes, le degré de $P_2(x)$ étant inférieur à celui de $Q(x)$. L'intégrale $\int P_1(x)\,dx$ est facile à calculer. Ainsi donc, s'il s'agit de calculer une intégrale du type $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, on peut toujours admettre que le degré de $P(x)$ est inférieur à celui de $Q(x)$.

Simplifions davantage l'expression $P(x)/Q(x)$ en supposant que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ ont des coefficients réels en les puissances de x.

Pour simplifier l'expression d'une fonction rationnelle il faut connaître des racines du polynôme dénominateur. Rappelons les principales notions sur les racines des polynômes. Dans le plan complexe $z = x + iy$, le polynôme $Q_n(z)$ de degré n se représente sous la forme d'un produit $Q(z) = C\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, où C est une constante, z_k, la racine k-ième du polynôme $Q(z)$. Si la racine z_p intervient dans $\prod$ l fois, alors $Q(z) = (z - z_p)^l r_p(z)$, où $r_p(z_p) \neq 0$. On dit dans ce cas que le polynôme $Q_n(z)$ admet une racine $z = z_p$ de multiplicité l. Si le polynôme $Q_n(z)$ est à coefficients réels, il admet, en plus de la racine $z = z_p$, la racine $z = \bar{z}_p$ de même multiplicité (la barre symbolise la conjuguée complexe). Pour prouver cette assertion, il suffit de se servir de l'égalité $\overline{z^m} = \overline{(\bar{z})^m}$:

$$\overline{Q(z)} = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m z^m} = \sum_{m=0}^{n} a_m (\bar{z})^m = Q(\bar{z}).$$

Donc, si $Q(z) = C\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, on a

$$\overline{Q(z)} = \bar{C}\prod_{k=1}^{n}(\bar{z} - \bar{z}_k) = C\prod_{k=1}^{n}(\bar{z} - z_k).$$

L'égalité n'a lieu que si $\bar{C} = C$ et si les facteurs de $Q(z)$ contenant la racine z_p se rencontrent dans le produit $\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ autant de fois que les facteurs renfermant $\bar{z}_p$.

Commençons par la méthode de simplification de l'expression d'une fonction rationnelle $P(x)/Q(x)$ impliquant la connaissance des racines réelles du dénominateur.

Supposons que le polynôme $Q(x)$ admet une racine $x = a$ de multiplicité k (a est un réel), c'est-à-dire que $Q(x) = (x - a)^k r(x)$, où $r(x)$ est un polynôme et $r(a) \neq 0$. Choisissons la constante A à partir de la condition de réaliser une division exacte du polynôme $P(x) - Ar(x)$ par $(x - a)$. Ceci a lieu si $P(a) - Ar(a) = 0$, ou donc si $A = P(a)/r(a)$. On aboutit à l'égalité $P(x) - Ar(x) = (x - a)P_1(x)$, où $P_1(x)$ est un polynôme d'un degré inférieur au plus grand des degrés des polynômes $P(x)$ et $r(x)$. Comme, par hypothèse, les polynômes $P(x)$ et $r(x)$ sont à coefficients réels en les puissances de x, il en est de même du polynôme $P_1(x)$. Substituant à $P(x)$ son expression $P(x) = Ar(x) + (x - a)P_1(x)$, on trouve

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^k r(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} r(x)}.$$

Le polynôme $P(x)$ étant d'un degré inférieur à celui de $Q(x) = (x - a)^k r(x)$, l'expression

$$P_1(x)/[(x - a)^{k-1} r(x)]$$

est une « fraction régulière », c'est-à-dire que le degré du polynôme au numérateur est inférieur à celui du dénominateur. De façon analogue, on a pour $k > 1$

$$\frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} r(x)} = \frac{\tilde{A}}{(x - a)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a)^{k-2} r(x)},$$

où le second terme est une « fraction régulière ». Poursuivant ce processus, on trouve

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s}{(x - a)^s} + \frac{P_k(x)}{r(x)},$$

où A_s sont des constantes et le degré du polynôme $P_k(x)$ est inférieur à celui du polynôme $r(x)$. Ce dernier admet toutes les racines du polynôme $Q(x)$ à l'exception de $x = a$. En extrayant les fractions « simples » de toutes les racines réelles de $Q(x)$, on trouve

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{l} \sum_{s=1}^{k_l} \frac{A_{sl}}{(x - a_l)^s} + \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

où a_l est la racine réelle du polynôme $Q(x)$ de multiplicité k_l et $\tilde{P}(x)$, $\tilde{Q}(x)$ sont des polynômes tels que le degré de $\tilde{P}(x)$ est inférieur à celui de $\tilde{Q}(x)$ et ce dernier n'admet que des racines complexes (A_{sl} sont des constantes).

Passons à la méthode d'extraction des fractions « simples » de l'expression $P(x)/Q(x)$ impliquant la connaissance des racines complexes du polynôme $Q(x)$. Soit α une racine complexe de multiplicité k. Son conjugué complexe $\bar{\alpha}$ est alors aussi racine de multiplicité k du polynôme $Q(x)$. Par conséquent, le polynôme $Q(x)$ doit se diviser par $(x - \alpha)^k(x - \bar{\alpha})^k = (x^2 + px + q)^k$, $(q - p^2/4 > 0)$, donc $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, où $Q_1(\alpha) \neq 0$, $Q_1(x)$ étant à coefficients réels en les puissances de x, puisque p et q sont réels.

Choisissons des constantes réelles M et N de façon à assurer la division exacte du polynôme $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$ par $x^2 + px + q$, donc par $(x - \alpha)$ et $(x - \bar{\alpha})$. Cette condition sera réalisée si

$$\begin{aligned} P(\alpha) - (M\alpha + N)Q_1(\alpha) &= 0, \\ P(\bar{\alpha}) - (M\bar{\alpha} + N)Q_1(\bar{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Montrons que pour $\alpha \neq \bar{\alpha}$ ce système d'équations par rapport aux constantes M et N admet une solution unique. En effet, le déterminant de ce système est $Q_1(\alpha)Q_1(\bar{\alpha})(\alpha - \bar{\alpha}) = |Q_1(\alpha)|^2(\alpha - \bar{\alpha})$ et pour $\alpha \neq \bar{\alpha}$ est distinct de zéro. Prouvons que les constantes M et N sont des réels. Il faut à cet effet passer dans les équations considérées aux conjuguées complexes (les constantes $\bar{M}$ et $\bar{N}$ vérifient les mêmes équations que les constantes M et N).

Ainsi donc

$$P(x) = (Mx + N)Q_1(x) + (x^2 + px + q)P_1(x).$$

Par conséquent,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)}.$$

Le second terme est une fraction « régulière ». Poursuivant le processus de mise en évidence des fractions simples, on trouve

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_1(x)},$$

où M_s, N_s sont des constantes réelles, $\tilde{P}(x)$ un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $Q_1(x)$.

L'expression $P(x)/Q(x)$ se laisse écrire donc sous la forme d'une somme des expressions du type $A/(x - a)^k$ et $(Mx + N)/(x^2 + px + q)^k$. Les coefficients dans la factorisation d'une fonction rationnelle en fractions simples se cherchent d'ordinaire par la méthode des coefficients indéterminés qui consiste à écrire la décomposition envisageable, mais avec des coefficients indéterminés. Multipliant les deux membres de l'égalité par le dénominateur, on établit une égalité entre certains polynômes. On calcule ensuite les coefficients indéterminés à partir d'un système d'équations qu'on obtient en égalant les coefficients des puissances de x dans les deux membres de l'égalité ou bien en portant dans cette égalité des valeurs bien déterminées de la variable x.

Ainsi donc, l'intégration des fonctions rationnelles se ramène à celle des expressions de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$ et $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^k}\,dx$. Calculons la première intégrale :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(k-1)}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{pour } k > 1, \\ \ln|x-a| & \text{pour } k = 1 \end{cases}.$$

(nous omettons d'écrire la constante d'intégration). Pour calculer la seconde intégrale, il nous faudra dégager dans le polynôme $x^2 + px + q$ le carré parfait : $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4$. En posant $t = x + p/2, a^2 = q - p^2/4 > 0$, on trouve

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{M(t-p/2)+N}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Ensuite,

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d[t^2+a^2]}{(t^2+a^2)^k} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(k-1)}\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} & \text{pour } k > 1, \\ (1/2)\ln(t^2+a^2) & \text{pour } k = 1. \end{cases}$$

Reste à calculer l'intégrale $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Pour $k = 1$, on a

$$I_k = \frac{1}{a}\,\text{Arc tg}\,\frac{t}{a}.$$

Pour $k > 1$ on peut établir une relation récurrentielle entre les intégrales I_k et I_{k-1}. On a

$$I_k = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \frac{1}{a^2}\left\{I_{k-1} - \frac{1}{2}\int \frac{t\,d[t^2+a^2]}{(t^2+a^2)^k}\right\}.$$

Intégrons la seconde intégrale par parties en posant $u(t) = t$, $dv(t) = d[t^2 + a^2]/(t^2 + a^2)^k$. Il vient

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left\{I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right\} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}I_{k-1}\right\}.$$

Réitérant la procédure autant de fois qu'il le faut, on aboutit à l'intégrale I_1 que l'on a déjà calculée. Nous avons terminé la description de la procédure de calcul de l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale $\int \frac{(2x+4)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$. On a

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par $(x-1)(x^2+1)^2$:

$$2x + 4 = A(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)(x^2+1)(x-1) + (M_2x+N_2)(x-1).$$

En posant $x = 1$, on trouve $A = 3/2$, et pour $x = i$ on obtient l'équation $2i + 4 = (M_2 i + N_2)(i-1)$. Séparons dans cette égalité les parties réelle et imaginaire, il vient : $-M_2 + N_2 = 2$, $-M_2 - N_2 = 4$, d'où $M_2 = -3$, $N_2 = -1$. En égalant les coefficients de x^4 et x^3, on trouve $M_1 = -A = -3/2$, $N_1 = M_1 = -3/2$. Ainsi donc,

$$\int\frac{(2x+4)}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| + \int\frac{(-3/2)(x+1)}{x^2+1}\,dx - \int\frac{(3x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Or

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1),$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg} x,$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Donc,

$$\int\frac{(2x+4)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{2}\ln|x-1| -$$

$$- \frac{3}{4} \ln (x^2 + 1) - 2 \operatorname{Arc\,tg} x + \frac{3 - x}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Exercice. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 5x + 8}{x^2 - 4} \, dx$.

§ 9. Les intégrales se ramenant à des intégrales de fonctions rationnelles par un changement de variables

On appelle fonction rationnelle $R(x, y)$ de deux variables x, y l'expression de la forme $P(x, y)/Q(x, y)$, où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes en les variables x et y. Signalons la propriété évidente suivante des intégrales du type $\int R[f_1(x), f_2(x)] \, dx$: *si après le changement de variable* $x = \varphi(t)$ *les fonctions* $f_1(x), f_2(x)$, dx/dt *sont des fonctions rationnelles de la variable* t, *l'intégrale proposée se ramène, par le changement de variable en question, à une intégrale d'une fonction rationnelle de* t. Ce fait permet de ramener certains types d'intégrales de fonctions élémentaires à des intégrales de fonctions rationnelles.

1. Intégrales du type $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$. Dans ce cas on fera l'usage du changement de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$, puisque les fonctions $\sin x = 2t/(1 + t^2)$, $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$, $dx/dt = 2/(1 + t^2)$ sont des fonctions rationnelles de la variable t. Dans nombre de cas spéciaux il est possible d'utiliser des changements de variables plus simples qu'on peut justifier comme suit. Soit

$$R(u, v) = P(u, v)/Q(u, v),$$

où $P(u, v)$, $Q(u, v)$ sont des polynômes en u et v.

1) Si l'un des polynômes $P(u, v)$, $Q(u, v)$ est pair et l'autre impair en u, on peut représenter $R(u, v)$ sous la forme

$$R(u, v) = \frac{uP_1(u^2, v)}{Q_1(u^2, v)},$$

où $P_1(\mu, \nu)$, $Q_1(\mu, \nu)$ sont des polynômes en μ et ν. On a dans ce cas

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = \int \frac{P_1(1 - \cos^2 x, \cos x)}{Q_1(1 - \cos^2 x, \cos x)} \sin x \, dx.$$

Par le changement de variable $t = \cos x$ on ramène l'intégrale donnée à une intégrale d'une fonction rationnelle, puisque $\sin x \, dx = - d[\cos x] = - dt$. Par des raisonnements analogues, on aboutit à la conclusion que lorsque l'un des polynômes $P(u, v)$, $Q(u, v)$ est pair et

l'autre, impair en v, le changement de variable $t = \sin x$ ramène l'intégrale $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ à une intégrale d'une fonction rationnelle.

2) Supposons maintenant que les polynômes $P(u, v)$, $Q(u, v)$ sont tels que a) ils sont invariants par le changement $u = -u, v = -v$, b) ils changent de signe par le changement indiqué. Il suffit de ne considérer que le premier cas, le second se ramenant au premier par la multiplication du numérateur et du dénominateur de la fonction rationnelle $R(u, v)$ par u ou v. On a

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} = \frac{P((u/v)v, v)}{Q((u/v)v, v)} = \frac{P_1(t, v)}{Q_1(t, v)},$$

où $t = u/v$, et $P_1(t, v)$, $Q_1(t, v)$ sont des polynômes en t et v. Par hypothèse, les polynômes $P_1(t, v)$, $Q_1(t, v)$ sont pairs en v (pour t fixe), par conséquent

$$P_1(t, v)/Q_1(t, v) = \tilde{P}(t, v^2)/\tilde{Q}(t, v^2),$$

où $\tilde{P}(\mu, \nu)$, $\tilde{Q}(\mu, \nu)$ sont des polynômes en μ et ν. Donc,

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{\tilde{P}(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)}{\tilde{Q}(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)}\, dx.$$

L'intégrale se ramène à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable $t = \operatorname{tg} x$, vu que $\cos^2 x = 1/(1 + t^2)$, $dx/dt = 1/(1 + t^2)$.

Signalons en conclusion que les intégrales des produits des fonctions trigonométriques du type $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ se ramènent à des intégrales du type $\int \sin ax\, dx$, $\int \cos ax\, dx$ moyennant les formules

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \{\cos [(\alpha - \beta)x] - \cos [(\alpha + \beta)x]\}/2,$$
$$\sin \alpha x \cos \beta x = \{\sin [(\alpha + \beta)x] + \sin [(\alpha - \beta)x]\}/2,$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \{\cos [(\alpha + \beta)x] + \cos [(\alpha - \beta)x]\}/2.$$

Exercice. Calculer les intégrales $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$, $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$.

2. Intégrales des expressions irrationnelles linéaires et homographiques. Soit l'intégrale $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$, où $ad \neq bc$ (n est un entier > 0). En posant $t = \sqrt[n]{(ax + b)/(cx + d)}$, on ramène l'intégrale donnée à une intégrale d'une fonction rationnelle, puisque la variable x (et donc dx/dt) est une fonction rationnelle de t :

$$x = (dt^n - b)/(ct^n - a).$$

3. Intégrales des expressions irrationnelles quadratiques. Soit une inté-

grale du type $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$. Moyennant les substitutions d'Euler on ramène cette intégrale à une intégrale d'une fonction rationnelle. Deux cas sont à distinguer suivant le signe du discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$:

a) $b^2 - 4ac < 0$. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles et donc ne change pas de signe lorsque x varie entre $-\infty$ et $+\infty$. Son signe est celui du coefficient a, puisque pour $x \to \infty$ on a $ax^2 + bx + c = ax^2[1 + O(1/x)]$. La fonction $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ n'a un sens que si $a > 0$. Posons $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$. C'est la *première substitution d'Euler*. Avec cette substitution la variable x (et donc dx/dt) et la fonction $\sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv t - x\sqrt{a}$ sont des fonctions rationnelles de t. En effet, $(t - x\sqrt{a})^2 = ax^2 + bx + c$, d'où $x = (t^2 - c)/(b + 2t\sqrt{a})$.

b) $b^2 - 4ac > 0$. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet dans ce cas les racines réelles $x = \alpha$ et $x = \beta$. Posons $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$ (*deuxième substitution d'Euler*). On a $(x - \alpha)^2 t^2 = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, d'où $x = (\alpha t^2 - a\beta)/(t^2 - a)$. Avec cette substitution, la variable x et les fonctions dx/dt, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sont des fonctions rationnelles de la variable t.

Exercice. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}\,dx$.

Nous avons vu les techniques générales d'intégration des expressions se ramenant à des intégrales de fonctions rationnelles. Dans certains cas particuliers, ces techniques peuvent nécessiter des calculs volumineux. Il faut alors penser à des artifices. Voyons quelques exemples caractéristiques.

Exemples. 1. On a

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t\; a\cos t\,dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \\ = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C, \quad x = a\sin t.$$

2. $$\int \frac{1 + x^{1/3}}{1 + x^{1/4}}\,dx = \int \frac{1 + t^4}{1 + t^3}\,12t^{11}\,dt = \\ = 12\int \left(t^{12} - t^9 + t^8 + t^6 - t^5 + t^2 + 1 - \frac{1 + t^2}{1 + t^3}\right)dt = \\ = 12\left[\frac{t^{13}}{13} - \frac{t^{10}}{10} + \frac{t^9}{9} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\ln|1 + t| - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C, \quad t = x^{1/12}.$$

3. $$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}(-b\sin bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \int \frac{b}{a^2}e^{ax}(b\cos bx)\,dx =$$
$$= e^{ax}\left(\frac{1}{a}\cos bx + \frac{b}{a^2}\sin bx\right) - \frac{b^2}{a^2}I.$$

Nous avons appliqué deux fois l'intégration par parties. Il vient en définitive

$$I = \frac{1}{1 + b^2/a^2}e^{ax}\left(\frac{1}{a}\cos bx + \frac{b}{a^2}\sin bx\right).$$

Exercice. Calculer l'intégrale $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$.

§ 10. Formules approchées de calcul d'intégrales définies

Rares sont les cas où il est possible de trouver une primitive d'une fonction donnée $f(x)$ et d'appliquer la formule de Newton-Leibniz pour calculer des intégrales définies. Nous allons chercher la formule approchée sous une forme analogue à la somme intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Si les $n + 1$ constantes λ_j sont choisies à partir des $n + 1$ conditions de telle sorte que la formule soit exacte pour les fonctions du type x^m, $m = 0, 1, \ldots, n$, elle le sera également pour une combinaison quelconque de ces fonctions, c'est-à-dire pour un polynôme arbitraire d'un degré non supérieur à n.

Les constantes λ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, se cherchent en remplaçant le polynôme $f(x)$ arbitraire de degré n par le polynôme d'interpolation de Lagrange qui lui est égal :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{\prod_{k\neq j}(x - x_k)}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)},$$

d'où

$$\lambda_j = \int_a^b \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} \, dx.$$

La formule approchée

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

s'appelle *formule d'intégration par quadratures* des intégrales définies. Elle est exacte si $f(x)$ est un polynôme d'un degré au plus égal à n. Si la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à cette condition, l'intégration par quadratures fournit une valeur approchée de l'intégrale. La formule d'intégration par quadratures peut s'avérer être exacte même pour les polynômes de degré supérieur à n, à condition de choisir convenablement les points λ_j.

Majorons l'erreur R_n de la formule d'intégration par quadratures, où

$$R_n = \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

supposant qu'elle est exacte pour les polynômes d'un degré au plus égal à m et que la fonction $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre $m + 1$ pour $x \in [a, b]$. A cet effet, considérons la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ et développons les fonctions $F(x)$ et $f(x)$ d'après la formule de Taylor, en représentant le reste sous forme intégrale :

$$F(x) = F_m(x) + \int_a^x F^{(m+2)}(t) \frac{(x - t)^{m+1}}{(m + 1)!} \, dt =$$

$$= F_m(x) + \int_a^x f^{(m+1)}(t) \frac{(x - t)^{m+1}}{(m+1)!} \, dt,$$

$$f(x) = f_m(x) + \int_a^x f^{(m+1)}(t) \frac{(x - t)^m}{m!} \, dt.$$

Ici $F_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{F^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k$, $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k$.

Comme $F'(x) = f(x)$ et donc $F^{(k)}(a) = f^{(k-1)}(a)$, en remplaçant dans l'expression de $F_m(x)$ l'indice de sommation k par $k+1$ (en modifiant en conséquence les limites de sommation), on trouve

$$F_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)\,!}(x-a)^{k+1},$$

i.e.

$$F_m(x) = \int_a^x f_m(t)\,\mathrm{d}t.$$

Estimons l'erreur de la formule d'intégration par quadratures. Nous avons

$$R_n = F(b) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j) = F_m(b) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_m(x_j) +$$

$$+ \int_a^b f^{(m+1)}(t)\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)\,!}\,\mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\frac{(x_j-t)^m}{m\,!}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f_m(x)$ étant un polynôme de degré m et la formule des quadratures, exacte pour les polynômes de ce degré, on peut écrire

$$F_m(b) = \int_a^b f_m(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_m(x_j).$$

Donc,

$$R_n = \int_a^b f^{(m+1)}(t)\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)\,!}\,\mathrm{d}t - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\frac{(x_j-t)^m}{m\,!}\,\mathrm{d}t.$$

Pour rendre cette expression symétrique, posons

$$K_m(x) = \begin{cases} x^m/m\,! & \text{pour } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

On a alors

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\frac{(x_j-t)^m}{m\,!}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^b K_m(x_j - t) f^{(m+1)}(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n} \lambda_j K_m(x_j - t) \right] f^{(m+1)}(t)\, dt.$$

L'expression de R_n peut être écrite sous la forme

$$R_n = \int_a^b \varphi_m(t) f^{(m+1)}(t)\, dt,$$

où $\varphi_m(t) = K_{m+1}(b - t) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j K_m(x_j - t)$.

On obtient en définitive la majoration suivante :

$$|R_n| \leqslant \int_a^b |\varphi_m(t) f^{(m+1)}(t)|\, dt \leqslant M_{m+1} \int_a^b |\varphi_m(t)|\, dt.$$

Ici $M_{m+1} = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(m+1)}(t)|$. Cette majoration est suffisamment exacte, puisque l'égalité a lieu chaque fois où la fonction $f(x)$ satisfait à la condition

$$f^{(m+1)}(x) = \operatorname{sign} \varphi_m(x),$$

où

$$\operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } f(x) > 0, \\ 0 & \text{pour } f(x) = 0, \\ -1 & \text{pour } f(x) < 0. \end{cases}$$

Essayons d'estimer qualitativement la « vitesse de décroissement » de l'erreur R_n lorsque $b \to a$ et pour n fixe. Posons $x = a + (b - a)s$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. On a alors

$$\lambda_j = \int_a^b \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}\, dx = (b - a) \int_0^1 \frac{\prod_{k \neq j} (s - s_k)}{\prod_{k \neq j} (s_j - s_k)}\, ds,$$

où $x_j = a + (b - a)s_j$, $0 \leqslant s_j \leqslant 1$. Par conséquent, $\lambda_j = O(b - a)$ lorsque $b \to a$. Ensuite,

$$K_m(x - t) = O[(b - a)^m],$$

$$\varphi_m(t) = O[(b-a)^{m+1}], \quad \int_a^b |\varphi_m(t)|\,dt = O[(b-a)^{m+2}],$$

$$R_n = O[(b-a)^{m+2}], \quad b \to a.$$

L'erreur R_n décroît vite avec le décroissement de la différence $b - a$. Ce fait a donné lieu à des *formules composées d'intégration par quadratures.* Il s'agit de représenter l'intégrale initiale sous la forme de N intégrales prises sur les intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ de longueur h, où $a_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $h = (b-a)/N$. Puis on applique aux intégrales $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$ les formules des quadratures ordinaires. L'erreur de chaque formule est $O[h^{m+2}]$, ou, ce qui revient au même, $O(1/N^{m+2})$ lorsque $N \to \infty$. Le nombre d'intégrales calculées avec cette erreur étant N, l'erreur sommaire R de la formule des quadratures compliquée est

$$R = O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right)$$

pour $N \to \infty$.

Exemples. 1. Formule des rectangles. Soit $n = 0$, $x_0 = (a+b)/2$; alors $\lambda_0 = \int_a^b dx = (b-a)$. La formule des quadratures s'écrit $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Montrons que cette formule est exacte pour les polynômes d'un degré non supérieur à un. Essayons d'estimer l'erreur. Dans ce cas le degré maximal est $m = 1$. On a

$$\varphi_1(t) = $$

$$= \begin{cases} (b-t)^2/2 - ((a+b)/2 - t)(b-a) = (a-t)^2/2 \text{ pour } t \leqslant \dfrac{(a+b)}{2}, \\ (b-t)^2/2 \text{ pour } t > (a+b)/2 \end{cases}$$

et donc $\int_a^b |\varphi_1(t)|\,dt = (b-a)^3/24$. Nous obtenons la majoration suivante de l'erreur d'intégration

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

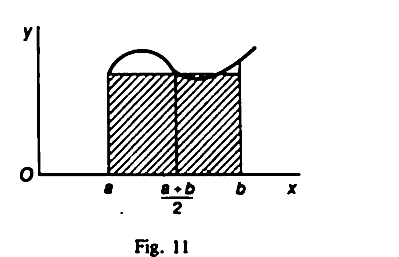


Fig. 11

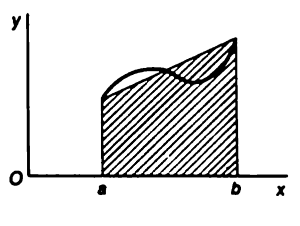


Fig. 12

L'interprétation géométrique de la forme des rectangles pour $f(x) > 0$ est la suivante : l'aire de la figure curviligne délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $y = f(x)$ est approximativement égale à l'aire du rectangle de côtés $(b - a)$ et $f\left(\frac{a + b}{2}\right)$ (fig. 11).

La formule des quadratures compliquée utilisant la formule des rectangles s'écrit

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)h,$$

où $a_k = a + kh$, $h = (b - a)/N$.

L'erreur de cette formule s'estime à l'aide de celle de la formule des rectangles :

$$|R| \leqslant \frac{(b - a)^3}{24N^2} \sup_{t \in [a,\, b]} |f''(t)|.$$

2. Formule des trapèzes. Soit $n = 1, x_0 = a, x_1 = b$. Dans ce cas

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{b - x}{b - a}\, dx = \frac{b - a}{2}, \quad \lambda_1 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a}\, dx = \frac{b - a}{2}$$

et la formule d'intégration par quadratures s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b - a}{2}\, [f(a) + f(b)].$$

Elle est exacte pour des polynômes d'un degré non supérieur à un. Dans le cas considéré, la valeur maximale de m est 1. Par ailleurs

$$\varphi_1(t) = \frac{(b - t)^2}{2} - \frac{b - a}{2}(b - t) = -\frac{(b - t)(t - a)}{2} \leqslant 0,$$

$$\int_a^b |\varphi_1(t)|\,dt = -\int_a^b \varphi_1(t)\,dt = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

et l'erreur d'intégration par quadratures a pour estimation

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

La formule d'intégration par quadratures compliquée s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)\right], \quad a_k = a + kh,$$

$$h = \frac{b-a}{N},$$

et l'erreur d'intégration est majorée par

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

En calculant l'intégrale par la formule des trapèzes, on remplace l'aire de la figure curviligne délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $y = f(x)$ par l'aire du trapèze mené par les points $(a; 0)$, $(b; 0)$, $(a\,; f(a))$, $(b\,; f(b))$ (fig. 12).

3. Formule de Simpson.

Soit $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$. On a

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{(x-(a+b)/2)(x-b)}{(a-(a+b)/2)(a-b)}\,dx = \frac{b-a}{6},$$

$$\lambda_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{((a+b)/2-a)((a+b)/2-b)}\,dx = \frac{2}{3}(b-a),$$

$$\lambda_2 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-(a+b)/2)}{(b-a)(b-(a+b)/2)}\,dx = \frac{b-a}{6}.$$

La formule d'intégration par quadratures s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

C'est la *formule de Simpson*. On montre qu'elle est exacte pour les polynômes d'un degré non supérieur à trois, c'est-à-dire que la valeur maximale de m est 3. On a par ailleurs

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)^4}{4\,!} - \dfrac{2}{3}\dfrac{(b-a)((a+b)/2-t)^3}{3\,!} - \dfrac{b-a}{6}\dfrac{(b-t)^3}{3\,!} \\ \qquad\qquad \text{si } a \leqslant t \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{(b-t)^4}{4\,!} - \dfrac{b-a}{6}\dfrac{(b-t)^3}{3\,!} \text{ si } \dfrac{a+b}{2} < t \leqslant b. \end{cases}$$

Transformons l'expression obtenue pour déterminer le signe de $\varphi_3(t)$:

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)^3}{4\,!}\left[(t-a) - \dfrac{2}{3}(b-a)\right] \text{ si } a \leqslant t \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{(b-t)^3}{4\,!}\left[(b-t) - \dfrac{2}{3}(b-a)\right] \text{ si } \dfrac{a+b}{2} < t \leqslant b. \end{cases}$$

On en tire que $\varphi_3(t) < 0$ pour $t \in [a, b]$. Donc

$$\int_a^b |\varphi_3(t)|\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \varphi_3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Il en résulte la majoration suivante de l'erreur de la formule de Simpson

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{t\in[a,\,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

La formule de Simpson compliquée s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\,[f(a_0) + 4f(a_1) + 2f(a_2) +$$

$$+ 4f(a_3) + 2f(a_4) + \ldots + 4f(a_{2N-1}) + f(a_{2N})],$$

$$a_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{2N},$$

et l'erreur d'intégration par cette formule a pour majoration

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880N^4} \sup_{t\in[a,\,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

La formule de Simpson est la plus usitée des formules d'intégration par quadratures.

Exercice. Etablir la formule des quadratures du type $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(1/2)$ et estimer son erreur connaissant que la fonction $f(x)$ admet une dérivée seconde continue.

§ 11. Intégrales impropres

La notion d'intégrale impropre est une généralisation de celle d'intégrale définie au cas où sont infinis soit la fonction à intégrer, soit l'intervalle d'intégration. Arrêtons-nous sur cette notion.

Soit une fonction $f(t)$ intégrable pour $t < b$ sur tout intervalle $[a, x]$ et non bornée au voisinage du point b ou bien $b = \infty$. Si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite lorsque $t \to b$, celle-ci s'appelle *intégrale impropre* de la fonction $f(t)$ et se note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On définit de façon analogue l'intégrale impropre dans le cas où la fonction $f(t)$ n'est pas bornée au voisinage du point a ou bien lorsque $a = -\infty$. En divisant l'intervalle d'intégration en intervalles partiels, on étend la notion d'intégrale impropre au cas de plusieurs points au voisinage desquels la fonction $f(t)$ n'est pas bornée ou lorsque $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Considérons l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à singularité unique pour $x = b$. Cette intégrale existe si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite lorsque $x \to b$. Donc, il faut et il suffit que soient réalisées les conditions du critère de Cauchy, à savoir : si b est un nombre fini, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|x - b| < \delta$, $|x' - b| < \delta$, on ait $|F(x') - F(x)| = \left|\int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$. Si $b = +\infty$, le critère de Cauchy s'énonce comme suit : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $c = c(\varepsilon) > 0$ tel que pour $x > c$, $x' > c$ l'on ait $\left|\int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

Le critère de Cauchy donne lieu à un critère suffisant simple d'existence de l'intégrale impropre, à savoir le *critère de comparaison* : si $|f(x)| \leqslant \varphi(t)$ pour $a \leqslant t < b$ et existe l'intégrale impropre $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ existe aussi. Ce critère s'établit à l'aide du critère de Cauchy et de l'inégalité évidente $\left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{x'} \varphi(t)\,dt$ pour $x \leqslant x' < b$.

En raisonnant par l'absurde, on établit le critère analogue de divergence des intégrales impropres : si pour $a \leqslant t < b$ on a l'inégalité $f(t) \geqslant \varphi(t) \geqslant 0$ et l'intégrale impropre $\int_a^b \varphi(t)\,dt$ est divergente, il en est de même de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$. Remarquons que de l'existence de l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|\,dt$ découle celle de l'intégrale impropre $\int_a^b (t)\,dt$. Donc, tout comme dans le cas des séries numériques, on peut parler de la convergence absolue et simple, ou semi-convergence, des intégrales impropres : l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est *absolument convergente* si existe l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|\,dt$; si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|dt$ est divergente, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ s'appelle *semi-convergente*.

Arrêtons-nous sur les critères de convergence des intégrales impropres. Le plus simple en est le suivant : si pour $x < b$ les intégrales $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ sont majorées (c'est-à-dire que $\int_a^x |f(t)|dt < C$ pour $a \leqslant x < b$, où C est une constante), alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente. En effet, la fonction $F(x)$ est monotone croissante et majorée. Il existe donc la borne supérieure $I = \sup\limits_{a \leqslant x < b} F(x)$, c'est-à-dire que

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x = x_0$ tel que $I - \varepsilon < F(x_0) \leqslant I$. La fonction $F(x)$ étant monotone, on a, pour $x_0 < x < b$, $I - \varepsilon < F(x_0) \leqslant F(x) \leqslant I$, c'est-à-dire que $|F(x) - I| < \varepsilon$ pour $b - x < \delta = b - x_0$ si b est un nombre fini. Si $b = +\infty$, on a $|F(x) - I| < \varepsilon$ pour $x \geqslant x_0$. Donc, dans les deux cas,

$$I = \lim_{x \to b} F(x) = \int_a^b |f(t)| \, dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Considérons un critère moins simple de convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ pour $b = +\infty$. Par un changement linéaire de la variable indépendante cette intégrale se ramène à une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

Théorème. *Si la fonction $f(t)$ est continue, décroissante et $f(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ sont soit simultanément convergentes, soit simultanément divergentes.*

□ La fonction $f(t)$ étant décroissante, on a pour $k \leqslant t < k + 1$ (k est un entier positif) :

$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k), \quad \text{d'où} \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant f(k).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$; par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Toutes les quantités intervenant dans cette inégalité sont monotones croissantes lorsque n croît. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ est convergente, alors

$$\int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Choisissant donc n à partir de la condition $x \leqslant n$ pour x quelconque, on trouve

$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} f(k),$$

c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$ est bornée supérieurement et strictement croissante. Par suite, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Supposons maintenant que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Alors, il découle de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

que les sommes partielles de la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sont bornées. D'où l'on déduit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ est convergente. ■

Le théorème que nous venons de démontrer est souvent utilisé comme critère de convergence ou de divergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$; il porte le nom de *critère de convergence de Cauchy-Maclaurin pour la série.*

Pour pouvoir appliquer le critère de comparaison pour les intégrales impropres ou le critère de Cauchy-Maclaurin il faut disposer d'un assortiment d'intégrales impropres types dont on sait qu'elles sont convergentes ou divergentes. En qualité de telles intégrales, il est commode d'utiliser les intégrales de fonctions puissances, intégrales $\int_a^x f(t)\,dt$ faciles à calculer pour $x < b$: si b est nombre fini, l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^{\alpha}}$ est convergente

pour $\alpha < 1$ et divergente pour $\alpha \geqslant 1$, si $b = +\infty$, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

Remarques. **1.** Montrons comment il faut appliquer le critère de comparaison. Soient $\psi(t) \geqslant 0$ et $\varphi(t) = O(\psi(t))$, $t \to b$, ou $\lim\limits_{t \to b} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = c$, et les intégrales $\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, $\int\limits_a^x \psi(t)\,dt$ existent pour $x < b$. Alors, de l'existence de l'intégrale impropre $\int\limits_a^b \psi(t)\,dt$ découle celle de l'intégrale impropre $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$ en vertu de la majoration $|\varphi(t)| \leqslant c_1\psi(t)$ (c_1 est une constante), vraie dans un voisinage du point b. Enonçons le critère analogue de divergence de l'intégrale : si $\lim\limits_{t \to b} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = c$ pour $\psi(t) \geqslant 0$ et l'intégrale $\int\limits_a^b \psi(t)\,dt$ diverge, il en est de même de l'intégrale $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$. Ainsi donc, on répond à la question de savoir si l'intégrale impropre est convergente ou non en considérant la partie principale de la fonction à intégrer pour $t \to b$.

2. Pour établir la convergence de l'intégrale impropre $\int\limits_a^b f(t)dt$ il est parfois utile d'intégrer préalablement par parties, pour $x < b$, l'intégrale $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Considérons en conclusion encore un type d'intégrales impropres qu'on rencontre, en particulier, dans la théorie des fonctions de la variable complexe. Supposons que la fonction $f(x)$ n'est pas bornée au voisinage du point $c \in]a, b[$ et intégrable sur les intervalles $[a, c - \varepsilon_1]$, $[c + \varepsilon_2, b]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. L'intégrale impropre $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $a < b$, se définit alors comme suit :

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx.$$

ε_1 et ε_2 tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre. Définie comme suite, l'intégrale impropre peut ne pas être convergente, mais la convergence a lieu lorsque $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Dans ce cas, la limite s'appelle *valeur principale de l'intégrale de Cauchy*. Notation : v. p. $\int_a^b f(x)\,dx$ (les lettres v. p. sont souvent omises). Ainsi donc

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right], \quad \varepsilon > 0.$$

La valeur principale de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ se définit de façon analogue dans le cas où l'on donne plusieurs points au voisinage desquels la fonction $f(x)$ n'est pas bornée. Lorsqu'il s'agit de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ avec une fonction $f(x)$ intégrable sur un intervalle fini quelconque, on définit sa valeur principale comme suit :

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

On appelle souvent *intégrales singulières* les intégrales prises au sens de la valeur principale.

Exemples. **1.** La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ est convergente d'après le critère de Cauchy-Maclaurin pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leqslant 1$, puisque telle est l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^\alpha}$.

2. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente pour $\alpha > 0$.

Intégrons par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\left.\frac{\cos t}{t^\alpha}\right|_1^x - \alpha\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme du second membre tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$, tandis que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de comparaison, puisque $|\cos t/t^{\alpha+1}| \leqslant 1/t^{\alpha+1}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc l'intégrale $\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$.

3. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arc\,tg}\,(1/t)}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Lorsque $x \to 0$, on a $\mathrm{Arc\,tg}\,x = O(x)$, donc $(\mathrm{Arc\,tg}\,(1/t))/(t+\sqrt{t}) = O(1/t^2)$, $t \to +\infty$. L'intégrale est convergente d'après le critère de comparaison, puisque telle est l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercices. **1.** Etudier la convergence des intégrales impropres

$$I_1 = \int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sin x}.$$

Calculer l'intégrale convergente, s'il y en a une.

2. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{5x^3+\sin x+2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\cos x}, \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$$

3. Déterminer pour quelles valeurs de p l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

4. Calculer les intégrales v. p. $\int_a^b \frac{dx}{x - c}$, $c \in]a, b[$; v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x}{1 + x^2}\, dx$.

§ 12. Intégrales définie et indéfinie des fonctions à valeurs complexes et vectorielles

On peut définir les notions de primitive et d'intégrale indéfinie pour les fonctions à valeurs complexes et vectorielles tout comme dans le cas de la dérivée. On a les égalités :

a) si $f(x) = u(x) + iv(x)$, alors

$$\int f(x)\, dx = \int u(x)\, dx + i \int v(x)\, dx,$$

b) si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, alors

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f_1(x)\, dx, \quad \int f_2(x)\, dx, \dots, \int f_m(x)\, dx \right).$$

La notion d'intégrale définie des fonctions à valeurs complexes et vectorielles est analogue à celle des fonctions ordinaires, à cette différence près que dans les inégalités correspondantes figurent les modules des nombres complexes ou des vecteurs et non des nombres réels. L'intégrale définie jouit de toutes les propriétés du cas des fonctions ordinaires, sauf le théorème de comparaison et la formule de la moyenne, car les opérations de comparaison ne sont pas définies pour les nombres complexes et les vecteurs. On a les égalités suivantes :

a) si $f(x) = u(x) + iv(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx + i \int_a^b v(x)\, dx,$$

b) si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx, \quad \int_a^b f_2(x)\, dx, \dots, \int_a^b f_m(x)\, dx \right).$$

Pour la somme intégrale composée pour une fonction $f(x)$ complexe ou vectorielle on a l'inégalité

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \Delta x_i,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Ainsi donc, passant à la limite pour $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_i$), on retrouve l'inégalité vraie pour les fonctions réelles :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b.$$

Pour $a > b$ cette inégalité s'écrit

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Ecrivons l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky pour l'intégrale d'un produit de fonctions à valeurs complexes :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx}, \quad a < b.$$

Elle découle de l'inégalité analogue pour la somme intégrale

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\,][g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\,] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|^2 \Delta x_i \sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_i)|^2 \Delta x_i}.$$

Il est évident que l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky pour l'intégrale reste vraie également dans le cas où les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ prennent des valeurs réelles. Soit maintenant $f(x)g(x)$ le produit scalaire des fonctions vectorielles $f(x)$ et $g(x)$; on a alors pour $a < b$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx}.$$

§ 13. Intégrales dépendant de paramètres

Nous allons appliquer les résultats obtenus lors de l'examen des notions de continuité et de dérivabilité de fonctions à l'étude des intégrales du type

$$I(x) = \int_a^b f(x, y)\,dy, \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

De telles intégrales s'appellent *intégrales dépendant des paramètres* $x_1, \ldots, x_m$.

Théorème. *Soit* $f(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, *une fonction continue sur l'ensemble* $a \leqslant y \leqslant b$, $x \in A$, *où* A *est un ensemble borné fermé. L'intégrale*

$$I(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

est alors une fonction continue sur l'ensemble A.

□ Etant continue sur un ensemble borné fermé $a \leqslant y \leqslant b$, $x \in A$, la fonction $f(x, y)$ y est uniformément continue. Par conséquent, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon_1$ si $\sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2} < \delta$.

En particulier, pour $y' = y$ on a $|f(x, y) - f(x', y)| < \varepsilon_1$ si $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$. On en déduit $|I(x) - I(x')| = \left|\int_a^b [f(x, y) - f(x', y)]\mathrm{d}y\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x, y) - f(x', y)|\mathrm{d}y\right| < \varepsilon_1(b - a)$ si $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$. Choisissons ε_1 à partir de la condition $\varepsilon_1(b - a) = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, pour $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$, on a l'inégalité $|I(x) - I(x')| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la fonction $I(x)$ est continue sur l'ensemble A. ■

Si $m = 1$, on peut prendre pour l'ensemble A l'intervalle $[c, d]$.

Voyons maintenant sous quelles conditions on peut dériver par rapport aux paramètres les intégrales dépendant de paramètres. Pour simplifier la tâche, bornons-nous au cas d'intégrales $I(x)$ dépendant d'un seul paramètre.

Théorème. *Soit* $I(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$, *la fonction* $f(x, y)$ *et la dérivée partielle* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ *étant continues pour* $y \in [a, b]$, $x \in [c, d]$. *Il existe alors sur l'intervalle* $[c, d]$ *la dérivée* $\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}$ *qu'on peut calculer en dérivant sous le signe de l'intégrale* :

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

□ Ecrivons la relation aux différences

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}.$$

Nous avons

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \int_a^b \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \, dy.$$

Servons-nous, pour y fixe, de la formule de Lagrange des accroissements finis :

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} \Delta x, \quad 0 < t < 1.$$

Donc

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \int_a^b \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} \, dy, \quad 0 < t < 1.$$

Etant continue sur un ensemble borné fermé de points (x, y) pour $x \in [c, d]$, $y \in [a, b]$, la dérivée $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ est uniformément continue sur cet ensemble. Ainsi donc, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f(x', y')}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| < \varepsilon_1 \quad \text{si} \quad \sqrt{|x' - x|^2 + |y' - y|^2} < \delta.$$

Posant $x' = x + t\Delta x$, $y' = y$, on trouve

$$\left| \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < \varepsilon_1 \quad \text{si} \quad |\Delta x| < \delta,$$

puisque dans ce cas $|x' - x| = |t\,\Delta x| = t|\Delta x| < \delta$. Par conséquent,

$$\left| \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \, dy \right| = \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^b \left| \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| dy \right| < \varepsilon_1 |b - a| \quad \text{si} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Choisissant pour ε donné la quantité ε_1 à partir de la condition

$\varepsilon_1 |b - a| = \varepsilon$, on trouve

$$\left|\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy\right| < \varepsilon \text{ si } |\Delta x| < \delta.$$

Ce qui signifie qu'existe la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{dI(x)}{dx}$ avec, par ailleurs,

$$\frac{dI(x)}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy. \blacksquare$$

On démontre un théorème analogue pour les intégrales dépendant de plusieurs paramètres : *soit* $I(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, *la fonction* $f(x, y)$ *et la dérivée partielle* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k}$ *étant continues pour* $y \in [a, b]$, $x \in A$, *où* A *est un ensemble borné fermé et convexe. Il existe alors, dans l'ensemble* A, *la dérivée partielle* $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ *qu'on peut calculer en dérivant sous le signe d'intégration* :

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k}\, dy.$$

L'exigence de la convexité de l'ensemble A s'explique par le fait que la formule de Lagrange des accroissements finis pour une fonction de plusieurs variables a été déduite pour une fonction définie sur un ensemble convexe.

Passons aux intégrales du type

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy,$$

où les bornes d'intégration dépendent de paramètres.

Supposons que les fonctions $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $f(x, y)$ sont continues pour $y \in [a, b]$, $x \in A$, où A est un ensemble borné fermé (par exemple, $A = [c, d]$) et $a \leqslant \alpha(x) \leqslant b$, $a \leqslant \beta(x) \leqslant b$. Montrons que l'intégrale $I(x)$ est une fonction continue sur l'ensemble A. On a

$$I(x+\Delta x) - I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)]\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,\mathrm{d}y - \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,\mathrm{d}y.$$

D'après le théorème sur la continuité de l'intégrale dépendant d'un paramètre, on a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)]\mathrm{d}y = 0.$$

Majorons les autres termes. La fonction $f(x, y)$ étant continue sur un ensemble borné fermé, elle est bornée sur cet ensemble, c'est-à-dire $|f(x, y)| \leqslant c$, où c est une constante. Donc,

$$\left|\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \left|\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)} |f(x+\Delta x, y)|\mathrm{d}y\right| \leqslant$$

$$\leqslant c|\alpha(x+\Delta x) - \alpha(x)|,$$

d'où, en vertu de la continuité de la fonction $\alpha(x)$, on a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

D'une façon analogue,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Donc,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [I(x+\Delta x) - I(x)] = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $I(x)$ est continue sur l'ensemble A. Indiquons maintenant la règle de calcul des dérivées de la fonction $I(x)$, supposant que les fonctions $f(x, y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ admettent des dérivées partielles continues sur l'ensemble $y \in [a, b]$, $x \in A$, où A est un ensemble borné fermé et convexe (par exemple, $A = [c, d]$). On a $I(x) = \varphi(x, \alpha(x), \beta(x))$, où $\varphi(x, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y)\,\mathrm{d}y$. D'après le théorème sur les dérivées de l'intégrale

dépendant de paramètres, on a

$$\frac{\partial \varphi(x, t_1, t_2)}{\partial x_k} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k} \, \mathrm{d}y.$$

En outre,

$$\frac{\partial \varphi(x, t_1, t_2)}{\partial t_1} = -f(x, t_1), \quad \frac{\partial \varphi(x, t_1, t_2)}{\partial t_2} = f(x, t_2).$$

Il découle de ces expressions que la fonction $\varphi(x, t_1, t_2)$ admet des dérivées partielles continues si $x \in A$, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$ et donc dérivable sur cet ensemble. Nous pouvons appliquer la règle de dérivation d'une fonction composée, il vient :

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial x_k} \right]_{t_1 = \alpha(x),\, t_2 = \beta(x)},$$

i.e.

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x_k} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k} \, \mathrm{d}y + f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x_k} - f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_k}.$$

Remarque. Lorsque nous avons traité la question d'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ de l'intégrale $I(x)$ dépendant des paramètres $x = (x_1, \ldots, x_m)$, nous avons demandé que la fonction à intégrer $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k}$ soient continues pour $y \in [a, b]$, $x \in A$, où A est un ensemble borné fermé et convexe. Or, pour calculer la dérivée $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ il suffit de connaître les valeurs de la fonction $f(x, y)$ dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point x, donc on peut relâcher la restriction imposée à l'ensemble A en admettant simplement que c'est un ensemble ouvert. On peut considérer au cours de la démonstration au lieu de l'ensemble A un voisinage fermé du point donné x (un voisinage fermé est justement un ensemble borné fermé et convexe).

Arrêtons-nous sur la question de savoir s'il est possible de changer l'ordre d'intégration lors de l'intégration suivant le paramètre d'une intégrale dépendant du paramètre.

Théorème. *Soit une fonction $f(x, y)$ continue pour $c \leqslant x \leqslant d$, $a \leqslant y \leqslant b$ et soit $I(x) = \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}y$. Alors, en calculant l'intégrale*

$\int_c^d I(x)\,dx$, *on peut intégrer suivant le paramètre sous le signe somme déterminant la fonction* $I(x)$, *à savoir*

$$\int_c^d I(x)\,dx = \int_a^b dy\left[\int_c^d f(x, y)\,dx\right].$$

□ Considérons sur l'intervalle $[c, d]$ la fonction suivante de la variable t :

$$\varphi(t) = \int_c^t I(x)\,dx - \int_a^b dy\left[\int_c^t f(x, y)\,dx\right].$$

On a

$$\varphi'(t) = I(t) - \frac{d}{dt}\left\{\int_a^b dy\left[\int_c^t f(x, y)\,dx\right]\right\}.$$

D'après le théorème sur la dérivation des intégrales dépendant de paramètres, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_a^b dy\left[\int_c^t f(x, y)\,dx\right]\right\} = \int_a^b dy\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_c^t f(x, y)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b f(t, y)\,dy = I(t).$$

Ainsi donc, $\varphi'(t) = 0$ et donc $\varphi(t) = \text{const}$ pour $c \leqslant t \leqslant d$. Mais $\varphi(c) = 0$, donc $\varphi(t) \equiv 0$ et

$$\int_c^t I(x)\,dx = \int_a^b dy\left[\int_c^t f(x, y)\,dx\right].$$

Pour terminer la démonstration du théorème il reste à poser dans cette égalité $t = d$. ■

Passons aux intégrales impropres dépendant de paramètres. Soit $I(x) = \int_a^b f(x, y)\,dy$. Si cette intégrale converge pour un x fixe, on dit que l'intégrale impropre $I(x)$ converge au point x. Si elle converge pour tous $x \in A$, l'intégrale impropre converge sur l'ensemble A. Introduisons la notion de

convergence uniforme de l'intégrale impropre. Pour fixer les idées, nous admettons que la fonction à intégrer admet une seule singularité pour $y \to b$.

Définition. L'intégrale $\int_a^b f(x, y)\,dy$ est dite *uniformément convergeant sur l'ensemble A vers une fonction $I(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\left|\int_a^{\bar y} f(x, y)dy - I(x)\right| < \varepsilon$ pour $0 < b - \bar y < \delta$ et tous $x \in A$.

Attirons l'attention sur le fait que dans cette définition le nombre δ peut être choisi indépendant de x.

Nous avons formulé la notion de convergence uniforme pour le cas où b est un nombre fini. Si $b = +\infty$, on remplacera dans la définition $\delta = \delta(\varepsilon)$ par $c = c(\varepsilon) > 0$ et l'inégalité $0 < b - \bar y < \delta$ par $\bar y > c$.

Théorème (critère de Cauchy). *Pour la convergence uniforme de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x, y)\,dy$ sur l'ensemble A, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy\right| < \varepsilon$ pour $0 < b - y_1 < \delta$, $0 < b - y_2 < \delta$, $x \in A$.*

□ *Nécessité.* Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(x, y)\,dy$ converge uniformément vers la fonction $I(x)$. Alors pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > > 0$ tel que

$$\left|\int_a^{\bar y} f(x, y)\,dy - I(x)\right| < \varepsilon_1 \text{ pour } 0 < b - \bar y < \delta, \quad x \in A.$$

Dans ce cas on a

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy\right| =$$

$$= \left|\left[\int_a^{y_2} f(x, y)\,dy - I(x)\right] - \left[\int_a^{y_1} f(x, y)\,dy - I(x)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^{y_2} f(x, y)\,dy - I(x)\right| + \left|\int_a^{y_1} f(x, y)\,dy - I(x)\right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

pour $0 < b - y_1 < \delta, 0 < b - y_2 < \delta$. Choisissons ε_1 à partir de la condition $2\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque. On a alors $\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon$ pour $0 < b - y_1 < \delta, 0 < b - y_2 < \delta$, c'est-à-dire que les conditions du critère de Cauchy sont remplies.

Suffisance. Supposons que pour $\varepsilon_1 > 0$ quelconque il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ tel que

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon_1 \text{ pour } 0 < b - y_1 < \delta, \quad 0 < b - y_2 < \delta, \quad x \in A.$$

Dans ce cas, pour x fixe, on a les conditions du critère de Cauchy de convergence de l'intégrale impropre vers une certaine valeur $I(x)$. Comme

$$I(x) = \lim_{y_2 \to b} \int\limits_{a}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

on a d'après le théorème de comparaison pour la limite d'une fonction

$$\left|\int\limits_{a}^{y_1} f(x, y)\, dy - I(x)\right| = \lim_{y_2 \to b} \left|\int\limits_{a}^{y_1} f(x, y)\, dy - \int\limits_{a}^{y_2} f(x, y)\, dy\right| =$$

$$= \lim_{y_2 \to b} \left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\right| \leqslant \varepsilon_1 \text{ pour } 0 < b - y_1 < \delta, \quad x \in A.$$

Choisissant, pour $\varepsilon > 0$, ε_1 quelconque, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, on trouve

$$\left|\int\limits_{a}^{y_1} f(x, y)\, dy - I(x)\right| < \varepsilon \text{ pour } b - y_1 < \delta = \delta(\varepsilon), \quad x \in A,$$

ce qui exprime précisément la convergence uniforme de l'intégrale $\int\limits_{a}^{b} f(x, y)\, dy$ vers la fonction $I(x)$ sur l'ensemble A. ■

Remarque. Si $b = +\infty$, il faut partout dans le théorème et dans le critère de Cauchy remplacer $\delta(\varepsilon)$ par $c = c(\varepsilon) > 0$, et les inégalités $0 < b - y_1 < \delta$, $0 < b - y_2 < \delta$ par les inégalités $y_1 > c$, $y_2 > c$.

Indiquons le critère de comparaison suivant de convergence uniforme : *si* $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ *pour* $x \in A$, $a \leqslant y < b$, *et l'intégrale*

$\int_a^b \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ *est convergente, alors l'intégrale* $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *est uniformément convergente sur l'ensemble* A.

L'assertion découle de l'inégalité

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad y_1 \leqslant y_2,$$

et du critère de Cauchy pour l'intégrale $\int_a^b \varphi(y)\,\mathrm{d}y$.

A l'aide de la notion de convergence uniforme des intégrales impropres dépendant de paramètres on peut prouver la validité des théorèmes précédents.

Théorème. *Soit* $f(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, *une fonction continue sur l'ensemble* $a \leqslant y < b$, $x \in A$, *où* A *est un ensemble borné fermé, et supposons que l'intégrale* $I(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *est uniformément convergente sur l'ensemble* A. *Alors l'intégrale* $I(x)$ *est une fonction continue sur l'ensemble* A.

□ L'intégrale impropre $I(x)$ étant uniformément convergente sur l'ensemble A, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $\bar{y} < b$ tel que $|\bar{I}(x) - I(x)| < \varepsilon_1$ pour $x \in A$, où $\bar{I}(x) = \int_a^{\bar{y}} f(x, y)\,\mathrm{d}y$. Donc on a pour $x, x' \in A$

$$\begin{aligned} &|I(x) - I(x')| = \\ &= |[I(x) - \bar{I}(x)] + [\bar{I}(x') - I(x')] + [\bar{I}(x) - \bar{I}(x')]| \leqslant \\ &\leqslant |I(x) - \bar{I}(x)| + |I(x') - \bar{I}(x')| + |\bar{I}(x) - \bar{I}(x')| < \\ &< 2\varepsilon_1 + |\bar{I}(x) - \bar{I}(x')|. \end{aligned}$$

La fonction $f(x, y)$ de l'intégrale $\bar{I}(x)$ étant sans singularités et continue sur l'ensemble $a \leqslant y \leqslant \bar{y}$, $x \in A$, la fonction $\bar{I}(x)$ est continue sur l'ensemble A. Il existe donc un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que $|\bar{I}(x) - \bar{I}(x')| < \varepsilon_1$ pour $|x - x'| < \delta$, d'où pour $|x - x'| < \delta$ on a $|I(x) - I(x')| < 3\varepsilon_1$. Choisissant maintenant ε_1 à partir de la condition $3\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque, on obtient pour $|x - x'| < \delta$ l'inégalité $|I(x) - I(x')| < \varepsilon$, donc la fonction $I(x)$ est continue sur l'ensemble A. ■

Remarque. Si $I(x)$ est une fonction d'une seule variable, on peut prendre en qualité de l'ensemble A figurant au théorème, l'intervalle $[c, d]$.

Théorème. *Supposons que les fonctions* $f(x, y)$ *et* $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ *sont continues pour* $y \in [a, b[$, $x \in [c, d]$ *et les intégrales*

$$I(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad S(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

sont uniformément convergentes sur l'intervalle $[c, d]$. *Il existe alors sur cet intervalle une dérivée* $\dfrac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}$ *qu'on peut calculer en effectuant une dérivation sous le signe somme, c'est-à-dire que*

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

□ Prouvons la convergence uniforme des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\,\mathrm{d}y$. La formule de Lagrange des accroissements finis pour $y_1 < y_2 < b$ nous donne

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x + \Delta x, y)\,\mathrm{d}y - \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{y_1}^{y_2} f(x + t\,\Delta x, y)\,\mathrm{d}y\right] = \Delta x \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

Le nombre t est ici tel que $0 < t < 1$ et ne dépend pas de y. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$ est uniformément convergente, donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\displaystyle\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$ si $b - y_1 < \delta$, $b - y_2 < \delta$, $x \in [c, d]$. Par conséquent, on a

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \, dy \right| = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x + t\,\Delta x, y)}{\partial x} \, dy \right| < \varepsilon,$$

pour $b - y_1 < \delta$, $b - y_2 < \delta$, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \int_a^b \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\partial x} \, dy$$

est uniformément convergente par rapport à Δx. En vertu de la convergence uniforme des intégrales $\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}$ et $\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \, dy$ il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un $\bar{y}$ tel que

$$\left| \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} - \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} \right| < \varepsilon_1, \quad |S(x) - \bar{S}(x)| < \varepsilon_1,$$

où $\bar{I}(x) = \int_a^y f(x, y) \, dy$, $\bar{S}(x) = \int_a^y \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \, dy$. Donc

$$\left| \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} - S(x) \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} - \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} \right] + [\bar{S}(x) - S(x)] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} - \bar{S}(x) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} - \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} \right| + |\bar{S}(x) - S(x)| +$$

$$+ \left| \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} - \bar{S}(x) \right| < 2\varepsilon_1 + \left| \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} - \bar{S}(x) \right|.$$

La fonction $f(x, y)$ de l'intégrale $I(x)$ ne présente pas de singularités et cette dernière est justiciable du théorème sur la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Il existe donc la limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\bar{I}(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{dI(x)}{dx},$$

égale à $S(x)$. Par conséquent, on peut exhiber un $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ tel que

$$\left|\frac{\bar{I}(x+\Delta x) - \bar{I}(x)}{\Delta x} - \bar{S}(x)\right| < \varepsilon_1 \quad \text{si} \quad |\Delta x| < \delta_1.$$

Ainsi donc, on a pour $|\Delta x| < \delta$

$$\left|\frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} - S(x)\right| < 3\varepsilon_1.$$

Posant $3\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque, on trouve que pour $|\Delta x| < \delta_1$ a lieu l'inégalité $\left|\frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} - S(x)\right| < \varepsilon$, donc la limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}$$

existe et est égale à $S(x)$. ■

On prouve un théorème analogue pour une intégrale $I(x)$ dépendant de plusieurs paramètres, en remplaçant l'intervalle fermé $[c, d]$ par un ensemble borné fermé et convexe A, ensemble de définition de la fonction $I(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, et les dérivées $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}$ par les dérivées $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial I(x)}{\partial x_k}$ pour k fixe (à vérifier à titre d'exercice).

Passons au théorème sur l'intégration suivant un paramètre d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

Théorème. *Soit $f(x, y)$ une fonction continue pour $x \in [c, d]$, $a \leqslant y < b < \infty$, et supposons que l'intégrale impropre*

$$I(x) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

est uniformément convergente sur l'intervalle $[c, d]$. Alors

$$\int_c^a I(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}x\right].$$

□ Etant uniformément convergente sur l'intervalle $[c, d]$, l'intégrale $I(x)$ est une fonction continue sur cet intervalle, donc l'intégrale $\int_c^d I(x)\mathrm{d}x$ existe. En vertu de la convergence uniforme de l'intégrale $I(x)$, il existe

pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un $\bar{y} < b$ tel que $|I(x) - \bar{I}(x)| < \varepsilon_1$, où

$$\bar{I}(x) = \int_a^{\bar{y}} f(x, y)\, \mathrm{d}y, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Or, $\int_c^d I(x)\, \mathrm{d}x = \int_c^d \bar{I}(x)\, \mathrm{d}x + \alpha$, où $\alpha = \int_c^d [I(x) - \bar{I}(x)]\mathrm{d}x$. Majorons α :

$$|\alpha| \leqslant \int_c^d |I(x) - \bar{I}(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon_1(d - c).$$

Choisissons ε_1 à partir de la condition $\varepsilon_1(d - c) = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque. Il vient $|\alpha| < \varepsilon$. Ensuite, d'après le théorème sur l'intégration suivant un paramètre de l'intégrale dépendant d'un paramètre, on a

$$\int_c^d \bar{I}(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^{\bar{y}} \mathrm{d}y \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}x \right].$$

D'où

$$\left| \int_c^d I(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^{\bar{y}} \mathrm{d}y \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \right| = |\alpha| < \varepsilon,$$

ce qui donne lieu à

$$\int_c^d I(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y \left[\int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}x \right],$$

où la dernière intégrale est impropre. ■

Tous les raisonnements des théorèmes démontrés restent en vigueur dans le cas où $b = +\infty$.

On peut généraliser au cas des fonctions à valeurs complexes ou vectorielles toutes les propriétés des intégrales dépendant de paramètres que nous venons d'établir. Les opérations de dérivation et d'intégration suivant un paramètre des intégrales dépendant de paramètres permettent souvent d'obtenir des expressions analytiques de ces intégrales.

Soit à calculer l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x, \quad \alpha > 0.$$

Comme en vertu des majorations

$$\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-\delta x}, \quad |e^{-\alpha x}\sin x| \leqslant e^{-\delta x}, \qquad \alpha \geqslant \delta > 0,$$

les intégrales $I(\alpha)$ et $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ convergent uniformément pour $\alpha \geqslant \delta > 0$ et tout δ, on peut dériver suivant le paramètre sous le signe somme

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \operatorname{Im}\left[\int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+i)x}\,dx\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\alpha+i}\right] = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

pour $\alpha > 0$. Intégrant la relation obtenue et compte tenu du fait que $\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0$, on trouve

$$I(\alpha) = \int\limits_\alpha^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t\,|_\alpha^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\alpha.$$

Exercices. **1.** Etudier la continuité de la fonction

$$F(x) = \int\limits_0^1 \frac{xf(y)}{x^2+y^2}\,dy,$$

où la fonction $f(y)$ est strictement positive et continue pour $y \in [0, 1]$.

2. Appliquant la dérivation par rapport au paramètre, calculer l'intégrale

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}, \quad |a| < 1.$$

3. Calculer $F'(x)$ si $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy$.

4. Calculer $F''(x)$ si $F(x) = \int\limits_a^b f(y)|x-y|\,dy$ ($a < b$, $f(x)$ est une fonction continue sur $[a, b]$).

5. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

usant de la dérivation suivant le paramètre d'une autre intégrale.

6. Compte tenu du résultat précédant l'exercice 1

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \alpha, \quad \alpha > 0,$$

montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Indication. Faisant intervenir le critère de Cauchy et l'intégration par parties, prouver préalablement la convergence uniforme de l'intégrale $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$ en se servant de l'égalité

$$\int e^{-\alpha x} \sin x\,dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{1 + \alpha^2}(\alpha \sin x + \cos x).$$

CHAPITRE 7

SUITES DE FONCTIONS

§ 1. Définition et généralités sur les suites de fonctions

Outre les suites numériques, dans l'Analyse sont largement utilisées les suites fonctionnelles, c'est-à-dire les suites $\{f_n(x)\}$ de fonctions d'une ou de plusieurs variables définies dans un ensemble A. Une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ sera dite *bornée sur* A s'il existe un nombre $c > 0$ tel que $|f_n(x)| \leqslant c$ pour $x \in A$ et tout n. Fixons une valeur de la variable x et considérons tous les termes de la suite au point x. Nous obtenons une suite numérique $\{f_n(x)\}$. Si cette dernière suite converge, on dit que la suite de fonctions converge au point x. Si la suite de fonctions converge pour tout $x \in A$, on dit qu'elle converge sur l'ensemble A tout entier. La limite de la suite dépend évidemment de x :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A.$$

Introduisons la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un ensemble A.

Définition. Une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ converge *uniformément* sur l'ensemble A vers une fonction $f(x)$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un numéro $N = N(\varepsilon)$ tel que pour $n \geqslant N$ on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in A$.

Pour la convergence uniforme on exige accessoirement, à la différence de la convergence ordinaire, l'indépendance de N par rapport à x.

Exemple. La convergence de la fonction $f_n(x) = x^n$ vers zéro sur l'intervalle $]0, 1[$ lorsque $n \to \infty$ n'est pas uniforme, car pour $x = x_n = \sqrt[n]{1/2}$ on a $f_n(x_n) = 1/2$ pour tout n et donc l'inégalité $|f_n(x)| < \varepsilon$ est impossible pour $n \geqslant N$, $x \in]0, 1[$ si, par exemple, $\varepsilon < 1/2$.

Exercice. Soit $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$ et supposons que la fonction $f(x)$ admet une dérivée continue sur $]a, b[$. Montrer que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers $f'(x)$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ pour $a < \alpha < \beta < b$.

Théorème (critère de Cauchy) **de convergence uniforme.** *Pour qu'une*

suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ *converge uniformément sur un ensemble* A *vers une fonction* $f(x)$ *il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon > 0$ *on puisse exhiber un* $N = N(\varepsilon)$ *tel que l'on ait* $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ *pour* $m \geqslant N$, $n \geqslant N$, $x \in A$.

□ *Nécessité.* Supposons que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur l'ensemble A vers une fonction $f(x)$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un numéro $N = N(\varepsilon_1)$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N(\varepsilon_1), x \in A$. Or, dans ce cas on a pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in A$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_m(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon_1.$$

Choisissant ε_1 égal à $\varepsilon/2$, $\varepsilon > 0$ quelconque, on trouve que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \geqslant N(\varepsilon)$, $x \in A$, ce qui est l'expression du critère de Cauchy.

Suffisance. Supposons que les conditions du critère de Cauchy sont réalisées, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $N = N(\varepsilon_1)$ tel que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in A$. Alors pour chaque x sont réalisées les conditions du critère de Cauchy de convergence de la suite numérique $\{f_n(x)\}$, c'est-à-dire qu'existe la limite $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pour $x \in A$. Passant dans les conditions du critère de Cauchy à la limite pour $m \to \infty$, on trouve d'après le théorème de comparaison pour les limites $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N(\varepsilon_1), x \in A$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque, posons $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Alors pour $n \geqslant N(\varepsilon)$, $x \in A$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$ sur l'ensemble A. ■

Théorème sur le changement de l'ordre de passage à la limite. *Supposons qu'une suite de fonctions* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformément sur un ensemble* A *vers une fonction* $f(x)$ *et qu'existent les limites* $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$. *Alors il doit exister la limite* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *où* $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

On peut noter l'assertion du théorème sous la forme

$$\lim_{x \to a} [\lim_{n \to \infty} f_n(x)] = \lim_{n \to \infty} [\lim_{x \to a} f_n(x)],$$

c'est-à-dire qu'on peut intervertir l'ordre de passage à la limite suivant l'indice n et la variable x pour les suites uniformément convergentes.

□ La suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ étant uniformément convergente sur l'ensemble A, il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un numéro $N = N(\varepsilon_1)$ tel que pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in A$, l'on a $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$. Passant dans cette relation à la limite pour $x \to a$, on trouve d'après le théorème de comparaison pour la limite d'une fonction que $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Si pour $\varepsilon > 0$ quelconque on choisit $\varepsilon_1 < \varepsilon$, on a $|b_n - b_m| < \varepsilon$

pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, c'est-à-dire que la suite $\{b_n\}$ converge, d'après le critère de Cauchy, vers un nombre b lorsque $n \to \infty$. En faisant tendre m vers ∞ dans l'inégalité $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon_1$, on obtient l'inégalité $|b_n - b| \leqslant \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$. Montrons qu'il existe la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ égale à b, où $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. En faisant tendre m vers ∞ dans l'inégalité $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in A$, on trouve $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$, $x \in A$. Par conséquent, $|f(x) - b| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - b_n] + [b_n - b]| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + |f_n(x) - b_n|$ pour $n \geqslant N(\varepsilon_1)$, $x \in A$. Fixons un numéro n tel que $n \geqslant N(\varepsilon_1)$. Comme $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$, il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que pour $|x - a| < \delta$ l'on a $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon_1$. D'où pour $|x - a| < \delta$ on tire $|f(x) - b| < 3\varepsilon_1$. Choisissant, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$, on obtient pour $|x - a| < \delta$ l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$, et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. ■

Corollaire. *Supposons qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions continues au point $x = a$ converge uniformément sur l'ensemble A vers une fonction $f(x)$ et $a \in A$. Alors la fonction $f(x)$ est continue au point $x = a$.*

En effet, si a est un point isolé de l'ensemble A, l'assertion est évidente. Si a est un point d'accumulation de l'ensemble A, on a d'après le théorème précédent $\lim\limits_{x \to a} \left[\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right] = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right]$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = f_n(a)$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 2. Dérivation et intégration terme à terme des suites de fonctions

Etablissons les conditions d'existence de la dérivée de la limite d'une suite de fonctions convergente $\{f_n(x)\}$. Pour simplifier les raisonnements, bornons-nous au cas où les fonctions $f_n(x)$ dépendent d'une seule variable.

Théorème sur la dérivabilité terme à terme d'une suite de fonctions. *Supposons que chacune des fonctions d'une suite $\{f_n(x)\}$ soit dérivable sur un intervalle $[a, b]$, la suite des dérivées $\{f_n'(x)\}$ étant uniformément convergente sur $[a, b]$. Si la suite $\{f_n(x)\}$ converge en un point $x_0 \in [a, b]$, elle converge partout sur $[a, b]$ vers une fonction $f(x)$ dérivable et $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$.*

□ Considérons la relation aux différences

$$\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x} = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad \Delta x = x - x_0.$$

Etablissons que la suite de fonctions $\left\{\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\right\}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ pour $x \neq x_0$. Nous devons montrer que sont satisfaites les conditions du critère de Cauchy de convergence uniforme. On a

$$\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta f_m(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta [f_n(x_0) - f_m(x_0)]}{\Delta x}.$$

D'après la formule de Lagrange des accroissements finis on trouve

$$\frac{\Delta [f_n(x_0) - f_m(x_0)]}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_n(x) - f_m(x)]|_{x=\xi} =$$
$$= f_n'(\xi) - f_m'(\xi), \qquad \xi \in]x_0, x[.$$

La suite $\{f_n'(x)\}$ étant uniformément convergente sur $[a, b]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ $N = N(\varepsilon)$ tel que l'on a $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $\xi \in [a, b]$. Ainsi donc, $\left|\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta f_m(x_0)}{\Delta x}\right| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, $m \geqslant N$, $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, c'est-à-dire que la suite $\left\{\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\right\}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ pour $x \neq x_0$. La convergence de la suite $\{f_n(x)\}$ vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$ et $x \in [a, b]$ découle donc de l'égalité $f_n(x) = f_n(x_0) + \frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\Delta x$ et de la convergence de la suite $\{f_n(x)\}$ pour $x = x_0$. Par conséquent, les conditions du théorème sont satisfaites pour tout $x_0 \in [a, b]$. D'autre part, la convergence uniforme de la suite $\left\{\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\right\}$ et la convergence de la suite $\{f_n(x)\}$ pour $x \in [a, b]$ impliquent

$$\lim_{x \to x_0}\left[\lim_{n \to \infty}\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\right] = \lim_{n \to \infty}\left[\lim_{x \to x_0}\frac{\Delta f_n(x_0)}{\Delta x}\right],$$

i.e.

$$\lim_{x \to x_0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0).$$

Il s'ensuit que la fonction $f(x)$ est différentiable au point x_0 et $f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ quelconque. ■

On démontre de façon analogue le théorème d'existence de la dérivée partielle de la limite d'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ de plusieurs variables : *si les fonctions $f_n(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, sont définies sur un ensemble convexe A, admettent sur cet ensemble des dérivées partielles $\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k}$ (pour k*

fixe) et les suites $\{f_n(x)\}$, $\left\{\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k}\right\}$ *convergent uniformément sur l'ensemble A, la fonction* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *admet sur A la dérivée partielle* $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ *et* $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_k}$. (Prouver ce théorème à titre d'exercice.)

Passons à la question d'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Théorème de l'intégrabilité terme à terme d'une suite de fonctions. *Soit* $\{f_n(x)\}$ *une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle* $[a, b]$. *Si cette suite converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers une fonction* $f(x)$, *alors* $f(x)$ *y est intégrable et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

□ En vertu de la convergence uniforme de la suite $\{f_n(x)\}$ sur l'intervalle $[a, b]$ pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe un numéro $N = N(\varepsilon_1)$ tel que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon_1$ pour $n \geqslant N$, $x \in [a, b]$. La fonction $f_n(x)$ étant intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ tel que pour toute subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ en m intervalles partiels on a l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_{i,n} \Delta x_i < \varepsilon_1$$

pour $\Delta < \delta$. Ici $\Delta = \max \Delta x_i$, $\omega_{i,n} = \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} |f_n(x) - f_n(x')|$ est l'oscillation de la fonction $f_n(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Soit $\omega_i = \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(x')|$ l'oscillation de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Estimons la somme $\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i$. Nous avons pour $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{gathered}|f(x) - f(x')| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x')] + \\ + [f_n(x') - f(x')]| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x') - f(x')| + \\ + |f_n(x) - f_n(x')| < 2\varepsilon_1 + |f_n(x) - f_n(x')|.\end{gathered}$$

Donc $\omega_i < 2\varepsilon_1 + \omega_{i,n}$ et, pour $\Delta < \delta$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i < 2\varepsilon_1(b - a) + \varepsilon_1.$$

Supposons maintenant que le nombre ε_1 est choisi à partir de la condition $2\varepsilon_1(b - a) + \varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors pour $\Delta < \delta$ nous avons $\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, ce qui signifie que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Si $n \geqslant N(\varepsilon_1)$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < \varepsilon_1(b - a) < \varepsilon,$$

i.e.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \blacksquare$$

Exercice. Montrer que $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x}\,dx = 0$.

Indication. Considérer les intégrales sur les intervalles $[0, 1 - \varepsilon]$ et $[1 - \varepsilon, 1]$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

§ 3. Séries de fonctions

Soit une série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$, où les fonctions $\varphi_k(x)$ sont définies sur un ensemble A. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ converge pour tout $x \in A$ fixe, elle s'appelle *convergente sur l'ensemble A*. La série s'appelle *uniformément convergente* sur l'ensemble A vers une fonction $f(x)$ définie sur A si la suite des sommes partielles $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$ converge uniformément sur l'ensemble A vers la fonction $f(x)$. Du critère de Cauchy de convergence uniforme d'une suite de fonctions découle le critère de Cauchy analogue de convergence uniforme d'une série de fonctions : *pour qu'une série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ converge uniformément sur un ensemble A, il faut et il suf-*

fit que pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe un* $N = N(\varepsilon)$ *tel que pour* $n > m \geqslant N(\varepsilon)$, $x \in A$, *l'on ait* $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \varphi_k(x)\right| < \varepsilon$.

Indiquons un critère simple de convergence uniforme d'une série de fonctions : soit $|\varphi_k(x)| \leqslant a_k$ pour $x \in A$ et supposons que la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge ; alors la série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ converge uniformément sur l'ensemble A. L'assertion découle du critère de Cauchy de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et de l'inégalité $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \varphi_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |\varphi_k(x)| \leqslant$ $\leqslant \sum_{k=m+1}^{n} a_k$.

Nous avons déduit la convergence d'une série de la convergence d'une suite. On pourrait mettre en correspondance, à chaque suite de fonctions, une série de fonctions et déduire des critères de convergence de la série certains critères de convergence de la suite. En effet, soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions. Considérons la série $f_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)]$. La somme partielle de cette série tronquée au $(n-1)$-ième terme vaut

$$f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] = f_n(x).$$

La convergence de la suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ découle donc de la convergence de la série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)]$. On en tire un critère simple de convergence uniforme d'une suite de fonctions : *si pour* $x \in A$ *sont satisfaites les inégalités* $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant a_k$ *et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, la suite de fonctions* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformément sur l'ensemble* A.

Enonçons pour les séries de fonctions les théorèmes découlant des théorèmes analogues démontrés plus haut pour les suites de fonctions :

1. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ *converge uniformément pour* $x \in A$ *vers une*

fonction $f(x)$ *et* $\lim_{x\to a} \varphi_k(x) = b_k$, *alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *est convergente, la limite* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to a} \varphi_k(x).$$

2. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ *converge uniformément pour* $x \in A$ *vers une fonction* $f(x)$ *et les fonctions* $\varphi_k(x)$ *sont continues pour* $x = a \in A$, *la fonction* $f(x)$ *est continue pour* $x = a$.

3. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ *converge uniformément sur l'intervalle* $[a, b]$ *vers une fonction* $f(x)$ *et les fonctions* $\varphi_k(x)$ *sont intégrables sur l'intervalle* $[a, b]$, *la fonction* $f(x)$ *est aussi intégrable sur l'intervalle* $[a, b]$, *et*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

i.e.

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_a^b \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

4. *Si les fonctions* $\varphi_k(x)$ *sont dérivables sur l'intervalle* $[a, b]$ *et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x)$ *converge uniformément sur cet intervalle, alors la convergence de la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ *en un point* x_0 *implique sa convergence en un point quelconque de l'intervalle* $[a, b]$ *vers une fonction* $f(x)$ *dérivable sur* $[a, b]$, *et*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x), \quad \textit{i.e.} \quad \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x).$$

Appliquons ces théorèmes à la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Comme il a été montré lors de l'examen des séries des nombres complexes, cette série est

convergente pour $|x| < R$ et divergente pour $|x| > R$, où $R = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. La série entière converge uniformément pour $|x| \leqslant x_0$, où x_0 est un nombre arbitraire tel que $|x_0| < R$. En effet, dans ce cas $|a_k x^k| \leqslant |a_k x_0^k|$ et la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k x_0^k|$ converge. Donc pour $|x| < R$ la série entière $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est une fonction continue.

Cherchons le domaine de convergence des séries qui s'obtiennent à la suite d'une dérivation et d'une intégration formelles de la série entière, c'est-à-dire des séries du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

C'est aussi les séries entières aux rayons de convergence $R_1 = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|}$ et $R_2 = 1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k-1}|/k}$. Comme d'après la règle de L'Hospital on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x/x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} (1/x)} = 1,$$

alors

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

et

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k-1}|/k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|},$$

donc $R_1 = R_2 = R$. Par conséquent, la série entière et les séries qui s'en obtiennent par une dérivation et une intégration terme à terme convergent uniformément pour $|x| \leqslant x_0 < R$. Pour cette raison, on peut appliquer à la série entière une dérivation et une intégration terme à terme pour $|x| < R$ (vu l'arbitraire dans le choix de x_0).

Exercice. Chercher le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{[1 + 2\cos(\pi n/4)]^n}{\ln n} x^n$ et établir le type de convergence de cette série à la frontière du domaine de convergence (dire si la série est absolument ou semi-convergente ou bien divergente).

§ 4. Théorème d'Arzelà

Le théorème de Bolzano-Weierstrass énoncé pour les suites numériques a un analogue valable pour les suites de fonctions continues. La question se pose de la façon suivante : sous quelles conditions est-il possible d'extraire d'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ une sous-suite uniformément convergente ? La condition voulant que la suite $\{f_n(x)\}$ soit bornée ne suffit pas. Il s'avère que les conditions suffisantes sont les suivantes : les fonctions $f_n(x)$ doivent être :

1) uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il doit exister un $c > 0$ tel que $|f_n(x)| \leqslant c$ pour tous n et $x \in [a, b]$;

2) équicontinues, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il doit exister un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous x et x' vérifiant l'inégalité $|x - x'| < \delta$ et tout n l'on ait $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$.

Théorème d'Arzelà. *De toute suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ uniformément bornée et équicontinue sur un intervalle $[a, b]$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

☐ Supposons que la suite $\{f_n(x)\}$ est uniformément bornée et équicontinue. Ceci signifie que $|f_n(x)| \leqslant c$ et, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta$, $x \in [a, b]$, $x' \in [a, b]$. Les graphiques des fonctions $f_n(x)$ sont compris dans le rectangle $y = -c$, $y = +c$, $x = a$, $x = b$ (fig. 13). Etablissons la propriété suivante de ces graphiques : choisissons un $\varepsilon_0 > 0$ arbitraire tel que c/ε_0 soit un entier ; d'après cette valeur de ε_0, cherchons la valeur correspondante de $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0)$ à partir de la condition d'équicontinuité des fonctions $f_n(x)$. Partageons l'intervalle $[a, b]$ en intervalles égaux d'une longueur inférieure à δ_0. Si l'on divise maintenant l'intervalle $[-c, +c]$ en intervalles de longueur ε_0, le grand rectangle se trouvera partagé en petits rectangles d'une hauteur ε_0 et d'une largeur $< \delta_0$. Le graphique de chaque fonction peut traverser à l'intérieur d'une bande $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ au plus deux rectangles voisins en vertu de l'inégalité $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon_0$ si $|x - x'| < \delta_0$. Extrayons de la suite $\{f_n(x)\}$ une suite uniformément convergente. Posons

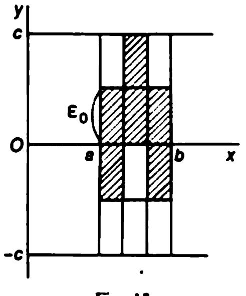


Fig. 13

$\varepsilon_k = \varepsilon_0/2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Associons aux nombres ε_k les nombres δ_k. Divisons le rectangle initial en petits rectangles de hauteur ε_0 et d'une largeur inférieure à δ_0. Alors dans la première bande à gauche, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ ($x_0 = a$, $x_1 - x_0 < \delta_0$) par au moins un couple de rectangles voisins (ce couple est hachuré sur le dessin) passe une infinité de courbes de fonctions. On peut donc extraire de la suite $\{f_n(x)\}$ une sous-suite des fonctions dont les graphiques traversent deux rectangles adjacents hachurés de la première bande à gauche. Dans la deuxième bande à gauche, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, nous n'allons considérer que les courbes des fonctions qui font partie de la sous-suite extraite. Raisonnant comme dans le cas des fonctions $f_n(x)$ de la première bande, nous pourrons extraire une nouvelle suite de fonctions, de celles dont les courbes traversent un couple de rectangles adjacents de la première bande et un couple analogue de la deuxième bande. En poursuivant ce processus d'extraction de sous-suites au passage à la bande suivante, on extrait en définitive de la suite $\{f_n(x)\}$ une sous-suite $\{f_{k_n}(x)\}$ des fonctions dont les courbes traversent dans chaque bande deux rectangles voisins. Introduisons la notation $f_{k_n}(x) = f_{n,0}(x)$. Ainsi donc, pour tout n, m, x on a $|f_{n,0}(x) - f_{m,0}(x)| \leqslant 2\varepsilon_0$.

Passons de ε_0 à ε_1. Divisons chaque intervalle partiel en intervalles d'une longueur inférieure à δ_1 et répétons *ad litteram* les raisonnements précédents, en remplaçant la suite $\{f_n(x)\}$ par la suite $\{f_{n,0}(x)\}$, ε_0 par ε_1, δ_0 par δ_1 ; nous extrairons en définitive de la suite $\{f_{n,0}(x)\}$ une sous-suite $\{f_{l_n,0}(x)\} = \{f_{n,1}(x)\}$ de fonctions dont les courbes traversent à l'intérieur de chaque bande (d'une largeur $<\delta_1$) deux rectangles adjacents d'une hauteur égale à $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$, c'est-à-dire que pour tous n, m, x on a $|f_{n,1}(x) -$ $- f_{m,1}(x)| \leqslant 2\varepsilon_1$.

De façon analogue, passant successivement à $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$, on extrait des sous-suites $\{f_{n,2}(x)\}, \{f_{n,3}(x)\}, \ldots, \{f_{n,k}(x)\}$. Remarquons que la suite $\{f_{n,k}(x)\}$ est une sous-suite de la suite $\{f_{n,k-1}(x)\}$ et les graphiques des fonctions $f_{n,k}(x)$ traversent, à l'intérieur d'une bande d'une largeur $<\delta_k$, deux rectangles adjacents d'une hauteur ε_k, d'où $|f_{n,l}(x) -$ $- f_{m,p}(x)| \leqslant 2\varepsilon_k$ pour $l \geqslant k, p \geqslant k$ et tous n, m, x. Considérons maintenant la suite $\{f_{n,n}(x)\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| < \varepsilon$ si $n \geqslant N, m \geqslant N$ et le numéro N est choisi à partir de la condition $2\varepsilon_N < \varepsilon$. Ainsi donc, on a pour la suite de fonctions $\{f_{n,n}(x)\}$ le critère de Cauchy de convergence uniforme. ■

§ 5. Approximation uniforme polynomiale d'une fonction donnée

Dans plusieurs applications pratiques de l'Analyse, il est très important de connaître s'il est possible d'approcher uniformément une fonction con-

tinue donnée à l'aide de fonctions d'une certaine classe, de polynômes, par exemple. La réponse la plus simple à cette question s'obtient à l'aide de δ-*suites* $\{D_n(x)\}$ construites au moyen de fonctions d'une classe donnée.

Théorème. *Soient* $D_n(x)$ *des fonctions intégrables sur l'intervalle* $[-\omega, \omega]$ *et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $D_n(-x) = D_n(x)$, $D_n(x) \geqslant 0$;

2) *la suite* $\{D_n(x)\}$ *converge uniformément vers zéro pour* $|x| \geqslant \delta > 0$, $\delta \leqslant \omega$ *quelconque* ;

3) $\int\limits_{-\omega}^{\omega} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Si la fonction $f(x)$ *est continue sur l'intervalle* $[a - \omega, b + \omega]$, *la suite des fonctions*

$$f_n(x) = \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$, *vers la fonction* $f(x)$.

□ Etant continue sur l'intervalle $[a - \omega, b + \omega]$, la fonction $f(x)$ y est bornée et uniformément continue, c'est-à-dire que $|f(x)| \leqslant c$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que l'on a l'inégalité $|f(t + x) - f(x)| < \varepsilon/2$ pour $|t| \leqslant \delta < \omega$ et $x \in [a, b]$. Cherchons une majoration de la quantité $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\int\limits_{-\omega}^{\omega} [f(t + x) - f(x)]D_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \\
&= \left|\int\limits_{|t|\leqslant\delta} [f(t + x) - f(x)]D_n(t)\,\mathrm{d}t + \right.\\
&\quad \left. + \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\omega} [f(t + x) - f(x)]D_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{|t|\leqslant\delta} |f(t + x) - f(x)|D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\omega} [|f(t + x)| + |f(x)|]D_n(t)\,\mathrm{d}t < \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{|t|\leqslant\delta} D_n(t)\,\mathrm{d}t + 2c\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\omega} D_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4c\sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\omega} D_n(t)(\omega - \delta).
\end{aligned}$$

La suite $\{D_n(t)\}$ étant uniformément convergente vers zéro pour $\delta \leqslant |t| \leqslant \omega$, il existe un numéro $N = N(\varepsilon)$ tel que pour $n \geqslant N$ l'on a

l'inégalité

$$4c \sup_{\delta \leq |t| \leq \omega} D_n(t)(\omega - \delta) < \varepsilon/2.$$

Par conséquent, pour $n \geq N$ on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers $f(x)$ pour $x \in [a, b]$. ■

A l'aide de ce théorème, on peut prouver la possibilité de l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un intervalle fermé, par une suite de polynômes, et d'une fonction continue périodique, par une suite de polynômes trigonométriques de même période [on appelle *polynôme trigonométrique* de degré n de période 2ω une expression de la forme $\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\omega} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\omega}\right)$].

Théorèmes de Weierstrass. 1. *Si une fonction $f(x)$ est continue sur un intervalle $[a, b]$, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers $f(x)$.*

2. *Si une fonction $f(x)$ est continue et périodique, il existe une suite de polynômes trigonométriques de même période, convergeant uniformément vers $f(x)$.*

□ 1. Montrons que, pour la condition auxiliaire de normalisation $\int_{-\omega}^{\omega} D_n(x)\, dx = 1$, la fonction

$$D_n(x) = c_n(1 - x^2/\omega^2)^n$$

vérifie toutes les conditions du théorème précédent sur l'approximation uniforme de fonctions. Majorons préalablement la constante c_n. D'après la formule de Taylor on a $(1 - t)^n = 1 - nt + n(n - 1)\xi^2/2$, où $\xi \in]0, t[$. Donc pour $n \geq 1$ on a l'inégalité $(1 - t)^n \geq 1 - nt$. Majorons l'intégrale $\int_{-\omega}^{\omega} \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n dx$ pour $n \geq 1$:

$$\int_{-\omega}^{\omega} \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n dx \geq \int_{-\omega/\sqrt{n}}^{\omega/\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n dx \geq$$

$$\geq \int_{-\omega/\sqrt{n}}^{\omega/\sqrt{n}} \left(1 - n\frac{x^2}{\omega^2}\right) dx = \frac{4\omega}{3\sqrt{n}}.$$

D'où

$$c_n = 1 \Big/ \int_{-\omega}^{\omega} \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n dx \leq 3\sqrt{n}/(4\omega).$$

Vérifions maintenant si les conditions du théorème sont remplies. On a $D_n(-x) = D_n(x)$, $D_n(x) \geqslant 0$, et de plus, pour $|x| \geqslant \delta$, $\delta < \omega$, on a la majoration

$$D_n(x) = c_n \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n \leqslant \frac{3\sqrt{n}}{4\omega} \left(1 - \frac{\delta^2}{\omega^2}\right)^n.$$

La limite du second membre de l'inégalité pour $n \to \infty$ est égale à zéro, donc la suite $\{D_n(x)\}$ converge uniformément vers zéro pour $|x| \geqslant \delta$.

Supposons que sur l'intervalle $[a, a + \omega]$ la fonction $f(x)$ est continue et vérifie la condition $f(a) = f(a + \omega) = 0$ (ici $\omega = b - a$). Prolongeons cette fonction sur l'intervalle $[a - \omega, a + 2\omega]$, posant $f(x) = 0$ pour $x \notin [a, a + \omega]$. Alors

$$f_n(x) = \int_{-\omega}^{\omega} f(t + x) D_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\omega + x}^{\omega + x} f(s) D_n(s - x)\, \mathrm{d}s.$$

Comme $-\omega + x \leqslant a$, $\omega + x \geqslant a + \omega$ pour $x \in [a, a + \omega]$, on a pour ces valeurs de x

$$f_n(x) = \int_{a}^{a+\omega} f(s) D_n(s - x)\, \mathrm{d}s.$$

D'après le théorème précédent, la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, a + \omega]$ vers la fonction $f(x)$.

Les fonctions $D_n(x)$ et donc $f_n(x)$ sont dans ce cas des polynômes de degré $2n$. On peut supprimer la condition $f(a) = f(a + \omega) = 0$ en considérant au lieu de la fonction $f(x)$ la fonction

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x - a)}{\omega} [f(\omega + a) - f(a)],$$

vérifiant la condition $g(a) = g(\omega + a) = 0$ et différant de la fonction $f(x)$ d'un terme qui est un polynôme du premier degré. Nous avons prouvé le premier théorème de Weierstrass.

2. Montrons que pour la condition supplémentaire de normalisation $\int_{-\omega}^{\omega} D_n(x)\, \mathrm{d}x = 1$, les fonctions

$$D_n(x) = c_n \left(\cos \frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}$$

vérifient les conditions du théorème sur l'approximation uniforme de fonctions. Il est évident que $D_n(-x) = D_n(x)$, $D_n(x) \geqslant 0$. Majorons la cons-

tante c_n. Nous avons

$$\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n} = \left(1 - \sin^2\frac{\pi x}{2\omega}\right)^n \geqslant 1 - n\sin^2\frac{\pi x}{2\omega} \geqslant 1 - n\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)^2.$$

Nous nous sommes servis de l'inégalité $|\sin t| \leqslant |t|$ pour $|t| \leqslant \pi/2$. Ainsi donc

$$\int_{-\omega}^{\omega}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}\mathrm{d}x > \int_{-2\omega/(\pi\sqrt{n})}^{2\omega/(\pi\sqrt{n})}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-2\omega/(\pi\sqrt{n})}^{2\omega/(\pi\sqrt{n})}\left[1 - n\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\,\frac{\omega}{\pi\sqrt{n}},$$

i.e.

$$c_n = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\omega}^{\omega}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}\mathrm{d}x} < \frac{3\pi\sqrt{n}}{8\omega}.$$

D'où, pour $|x| \geqslant \delta$

$$D_n(x) < \frac{3\pi\sqrt{n}}{8\omega}\left(1 - \sin^2\frac{\pi\delta}{2\omega}\right)^n,$$

puisque $\cos^2\frac{\pi x}{2\omega} = 1 - \sin^2\frac{\pi x}{2\omega} < 1 - \sin^2\frac{\pi\delta}{2\omega}$. Le second membre de l'inégalité converge vers zéro lorsque $n \to \infty$, par conséquent, la suite $\{D_n(x)\}$ converge uniformément vers zéro pour $|x| \geqslant \delta$. Soit $f(x)$ une fonction périodique continue de période 2ω. Alors pour $x \in [-\omega, \omega]$ on a

$$f_n(x) = \int_{-\omega}^{\omega} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\omega+x}^{\omega+x} f(s)D_n(s - x)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\omega}^{\omega} f(s)D_n(s - x)\,\mathrm{d}s + \int_{-\omega+x}^{-\omega} f(s)D_n(s - x)\,\mathrm{d}s -$$

$$- \int_{\omega+x}^{\omega} f(s)D_n(s - x)\,\mathrm{d}s.$$

Comme

$$f(x - 2\omega) = f(x), \quad D_n(x - 2\omega) = D_n(x),$$

alors

$$\int_{-\omega+x}^{-\omega} f(s)D_n(s-x)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\omega+x}^{\omega} f(s-2\omega)D_n(s-x-2\omega)\,\mathrm{d}s = \int_{\omega+x}^{\omega} f(s)D_n(s-x)\,\mathrm{d}s,$$

d'où $f_n(x) = \int_{-\omega}^{\omega} f(s)D_n(s-x)\,\mathrm{d}s.$

D'après le théorème sur l'approximation uniforme d'une fonction, la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur l'intervalle $[-\omega, \omega]$ vers la fonction $f(x)$. Les fonctions $f_n(x)$ et $f(x)$ étant périodiques, la convergence uniforme de la suite $\{f_n(x)\}$ a lieu pour tout x.

Explicitant la fonction $D_n(x)$, on peut prouver que les fonctions $f_n(x)$ se laissent représenter sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos\frac{\pi kx}{\omega} + b_k \sin\frac{\pi kx}{\omega}\right),$$

puisque

$$D_n(x) = \frac{c_n}{2^n}\left(1+\cos\frac{\pi x}{\omega}\right)^n = c_n\left(1 - \frac{e^{i\pi x/\omega} + e^{-i\pi x/\omega}}{2}\right)^n$$

et

$$e^{\pm i\frac{\pi kx}{\omega}} = \cos\frac{\pi kx}{\omega} \pm i\sin\frac{\pi kx}{\omega},$$

ce qui achève la démonstration du second théorème de Weierstrass. ■

§ 6. Suites de fonctions à valeurs complexes et vectorielles

Soit une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions à valeurs complexes $f_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$. La définition de la convergence uniforme est valable dans ce cas aussi si l'on fait intervenir la notion de module d'un nombre complexe. Pour que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur un ensemble A vers une fonction à valeurs complexes $f(x) = u(x) + iv(x)$, il faut et il suffit que les suites $\{u_n(x)\}$ et $\{v_n(x)\}$ convergent uniformément sur l'ensemble A vers les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ respectivement. Cette assertion découle des relations suivantes :

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{[u_n(x) - u(x)]^2 + [v_n(x) - v(x)]^2},$$

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)|, \quad |v_n(x) - v(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)|.$$

Il en est de même des suites de fonctions vectorielles $\{f_n(x)\}$, où $f_n(x) = (f_{n,1}(x), f_{n,2}(x), \ldots, f_{n,m}(x))$.

La question de la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ composée de fonctions à valeurs complexes ou vectorielles, se ramène, comme dans le cas des séries de fonctions réelles, à la convergence uniforme des suites de sommes partielles. Sont également valables le critère de Cauchy et le critère qui en découle (critère de comparaison) de convergence d'une série de fonctions : si $|\varphi_k(x)| \leqslant \tilde{\varphi}_k(x)$ et la série $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x)$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$; si, par ailleurs, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_k(x)$ converge uniformément, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ converge elle aussi uniformément. Tout comme pour les suites de fonctions réelles, la suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ composée de fonctions à valeurs complexes ou vectorielles converge uniformément si converge uniformément la série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)]$.

Ainsi, tous les résultats obtenus pour les séries et les suites de fonctions réelles sont valables pour les séries et les suites fonctionnelles composées de fonctions à valeurs complexes et vectorielles. Quelques difficultés peuvent survenir lors de la démonstration du théorème d'Arzelà pour les fonctions à valeurs complexes et vectorielles. Prouvons ce théorème pour les fonctions à valeurs complexes.

☐ Supposons que la suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions à valeurs complexes vérifie les conditions suivantes : $|f_n(x)| \leqslant C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [a, b]$. Montrons qu'on peut extraire de la suite $\{f_n(x)\}$ une sous-suite uniformément convergente. Soit $f_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$. Alors $|u_n(x)| \leqslant C$, $|v_n(x)| \leqslant C$ et $|u_n(x) - u_n(x')| < \varepsilon$, $|v_n(x) - v_n(x')| < \varepsilon$ pour $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [a, b]$.

Ainsi donc, les suites $\{u_n(x)\}$ et $\{v_n(x)\}$ vérifient les conditions du théorème d'Arzelà et l'on peut extraire de la suite $\{u_n(x)\}$ une sous-suite uniformément convergente $\{u_{k_n}(x)\} = \{u_{n,1}(x)\}$.

Considérons la sous-suite analogue $\{v_{k_n}(x)\} = \{v_{n,1}(x)\}$. Comme elle vérifie les conditions du théorème d'Arzelà, on peut en extraire une suite uniformément convergente $\{v_{l_n,1}(x)\} = \{v_{n,2}(x)\}$.

Soit $\{u_{l_n,1}(x)\} = \{u_{n,2}(x)\}$. La suite $\{f_{n,2}(x)\}$, où $f_{n,2}(x) = u_{n,2}(x) + iv_{n,2}(x)$, est une sous-suite relativement à $\{f_n(x)\}$, les suites $\{u_{n,2}(x)\}$ et $\{v_{n,2}(x)\}$ étant uniformément convergentes. Donc, il en est de même de la suite $\{f_{n,2}(x)\}$. ■

Le théorème d'Arzelà pour les fonctions vectorielles se démontre de façon analogue, seulement au lieu des parties réelles et imaginaires des fonctions $f_n(x)$ il faut considérer une à une les composantes $f_{n,k}(x)$ des fonctions vectorielles $f_n(x)$ et utiliser les inégalités suivantes : $|f_{n,k}(x)| \leqslant |f_n(x)|$, $|f_{n,k}(x) - f_{n,k}(x')| \leqslant |f_n(x) - f_n(x')|$.

CHAPITRE 8

SÉRIES DE FOURIER. INTÉGRALES DE FOURIER

§ 1. Convergence en moyenne

Les fonctions intégrables sur un intervalle fermé $[a, b]$ sont justiciables d'une généralisation du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme de fonctions par une suite de polynômes trigonométriques. Généralisons préalablement la notion de convergence uniforme d'une suite.

Définition. La suite $\{f_n(x)\}$ *converge en moyenne* vers la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = 0.$$

On peut montrer que de la convergence uniforme découle la convergence en moyenne. En effet, si la suite $\{f_n(x)\}$ converge sur l'intervalle $[a, b]$ uniformément vers la fonction $f(x)$, alors, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe un numéro $N = N(\varepsilon_1)$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$, si $n \geqslant N$, $x \in [a, b]$. Mais alors on a pour $n \geqslant N$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx < \varepsilon_1^2(b - a).$$

Posant $\varepsilon_1^2(b - a) = \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on trouve

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx < \varepsilon$$

pour $n \geqslant N$, ce que nous voulions.

La notion de convergence en moyenne s'avère très utile lors de l'étude du comportement des intégrales de la forme $\int_a^b f_n(x) g(x) \, dx$ à fonction $g(x)$ donnée lorsque $n \to \infty$.

Théorème. *Supposons qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$ converge sur cet intervalle en moyenne vers une fonc-*

tion $f(x)$ intégrable sur $[a, b]$, et la fonction $g(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

□ Servons-nous de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky, il vient

$$\left|\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Le second membre de l'inégalité converge vers zéro lorsque $n \to \infty$, d'où l'assertion du théorème. ■

Indiquons une propriété de la notion de convergence en moyenne, importante pour les applications.

Théorème. *Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\bar{f}(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$, prenant des valeurs données pour $x = a$ et $x = b$, telle que*

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2\,dx < \varepsilon.$$

□ Soit R une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels $[x_i, x_{i+1}]$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, Δ est la plus grande des longueurs de ces intervalles. Puisque la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, on a $|f(x)| \leqslant M$ et

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

où M est une constante, ω_i l'oscillation de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Définissons la fonction $\bar{f}(x)$ comme suit : sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la fonction $\bar{f}(x)$ est une fonction linéaire qui prend des valeurs données pour $x = a$ et $x = b$, et, de plus, $\bar{f}(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$. Il est évident que la fonction $\bar{f}(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et que pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ intérieur à $[a, b]$ on a les inégalités

$$\min\,[f(x_i), f(x_{i+1})] \leqslant \bar{f}(x) \leqslant \max\,[f(x_i), f(x_{i+1})],$$

$$f(x) - \bar{f}(x) \leqslant f(x) - \min [f(x_i), f(x_{i+1})] \leqslant \omega_i,$$
$$\bar{f}(x) - f(x) \leqslant \max [f(x_i), f(x_{i+1})] - f(x) \leqslant \omega_i,$$

c'est-à-dire que $|f(x) - \bar{f}(x)| \leqslant \omega_i$, d'où

$$[f(x) - \bar{f}(x)]^2 \leqslant [|f(x)| + |\bar{f}(x)|]|f(x) - \bar{f}(x)| \leqslant 2M\omega_i.$$

Dans les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, on a

$$[f(x) - \bar{f}(x)]^2 \leqslant [|f(x)| + |\bar{f}(x)|]^2 \leqslant (M + M_1)^2,$$

où $M_1 = \max [M, |\bar{f}(a)|, |\bar{f}(b)|]$. Donc

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - \bar{f}(x)]^2 \,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant 2M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + 2(M + M_1)^2 \Delta.$$

Le second membre de l'inégalité converge vers zéro avec $\Delta \to 0$. Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ telle que

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon. \blacksquare$$

Remarque. Indiquons un corollaire, fort utile pour les applications, qu'on tire du théorème qu'on vient de démontrer : *si une fonction $f(x)$ est intégrable sur un intervalle $[a, b]$, alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $\bar{f}(x)$ admettant des valeurs données en $x = a$ et $x = b$ telle que*

$$\int_a^b |f(x) - \bar{f}(x)| \,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

□ En effet, il découle du théorème que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe une fonction continue $\bar{f}(x)$ admettant des valeurs données en $x = a$ et $x = b$ telle que

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon_1.$$

Or, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky,

$$\int_a^b |f(x) - \bar{f}(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 \,\mathrm{d}x (b - a)} < \sqrt{\varepsilon_1 (b - a)}.$$

En posant $\sqrt{\varepsilon_1 (b - a)} = \varepsilon$, on obtient l'assertion du corollaire. $\blacksquare$

§ 2. Série de Fourier

Abordons le problème, très important pour les applications, de recherche, pour une fonction $f(x)$, de la meilleure approximation en moyenne sur un intervalle $[a, b]$ à l'aide d'une combinaison linéaire des n premières fonctions de la suite $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... Le problème consiste à déterminer les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui minimisent la quantité

$$I = I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right]^2 \mathrm{d}x.$$

Le problème admet une solution si les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont mutuellement orthogonales sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire si $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $k \neq l$. Dans ce cas

$$I = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 d_k^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2 d_k^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 d_k^2,$$

où

$$d_k^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en tire

$$\delta_n = \min_{a_i} I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = I(c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 d_k^2.$$

Remarquons que les constantes c_k ne dépendent pas de n, donc les quantités δ_n sont monotones décroissantes pour des n croissants et sont bornées inférieurement ($\delta_n \geqslant 0$). Par conséquent, il existe une limite $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_0 \geqslant \geqslant 0$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2$ converge, avec par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2 = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \delta_0 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité obtenue porte le nom d'*inégalité de Bessel*. Pour $\delta_0 = 0$ la suite de fonctions $\{f_n(x)\}$, où $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$, converge en moyenne sur $[a, b]$ vers la fonction $f(x)$. Si $\delta_0 = 0$ pour une fonction $f(x)$ arbitraire d'une certaine classe de fonctions, le système de fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ est dit *complet sur l'intervalle* $[a, b]$ pour la classe de fonctions en question. On a dans ce cas l'égalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

qui s'appelle *égalité de Parseval.*

Servons-nous des résultats obtenus lors de la recherche de la meilleure approximation en moyenne de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ à l'aide de polynômes trigonométriques d'un degré donné n et de période $(b - a)$. Comme le degré d'un polynôme trigonométrique est invariant par un changement linéaire de variable, le problème qui nous préoccupe se ramène à un problème analogue posé pour le cas $a = -\pi$, $b = \pi$, où le polynôme trigonométrique de degré n est de la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$. On vérifie aisément que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq l, \\ \pi & \text{pour } k = l \neq 0, \\ 2\pi & \text{pour } k = l = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq l, \\ \pi & \text{pour } k = l \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx\,dx = 0.$$

Ainsi, les fonctions constituant la suite $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ ... sont mutuellement orthogonales sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Pour cette raison, la meilleure approximation en moyenne sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de la fonction $f(x)$ est réalisée par des polynômes trigonométriques de la forme

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

(au lieu d'écrire a_0, on a désigné le premier coefficient par $a_0/2$ pour rendre symétriques les formules de a_k et b_k). Les fonctions $f_n(x)$ peuvent être regardées comme des sommes partielles de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

qui s'appelle *série de Fourier* de la fonction $f(x)$. L'inégalité de Bessel s'écrit dans ce cas

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Montrons que pour des fonctions intégrables sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on a l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

Théorème. *Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ convergent en moyenne sur cet intervalle vers cette fonction même.*

☐ Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, on peut exhiber une fonction continue $g(x)$ vérifiant la condition $g(-\pi) = g(\pi)$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 \, dx < \varepsilon_1.$$

En outre, en vertu du théorème de Weierstrass, il existe une suite $\{g_n(x)\}$ de polynômes trigonométriques de période 2π uniformément convergeant vers $g(x)$. Cette suite converge vers $g(x)$ également en moyenne sur $[-\pi, \pi]$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un numéro $N = N(\varepsilon_1)$ tel que

pour $n \geqslant N$ on a l'inégalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - g_n(x)]^2 \, dx < \varepsilon_1.$$

La somme partielle $f_n(x)$ de la série de Fourier assure la meilleure approximation en moyenne de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ parmi tous les polynômes trigonométriques de degré n, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 \, dx.$$

Ainsi donc, on a pour $n \geqslant N$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{[f(x) - g(x)] + [g(x) - g_n(x)]\}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [g(x) - g_n(x)]^2 dx \right\} < 4\varepsilon_1.$$

On s'est servi de l'inégalité évidente $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$. Choisissant pour $\varepsilon > 0$ quelconque le nombre ε_1 à partir de la condition $4\varepsilon_1 = \varepsilon$, on trouve pour $n \geqslant N(\varepsilon)$ l'inégalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

qui traduit la convergence en moyenne de la suite $\{f_n(x)\}$ vers la fonction $f(x)$. ■

Le système de fonctions 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ... est donc complet sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ dans la classe des fonctions intégrables sur cet intervalle. Le fait que la somme partielle de la série de Fourier $f_n(x)$ de la fonction $f(x)$ admet sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ des dérivées continues d'ordre quelconque nous permet de généraliser le théorème précédent.

Théorème. *Une fonction $f(x)$ intégrable sur un intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être approchée en moyenne sur cet intervalle avec une précision aussi bonne que l'on veut à l'aide d'une fonction admettant des dérivées continues d'ordre quelconque, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut exhiber une fonction $\bar{f}(x)$ admettant des dérivées continues de tout ordre telle que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \bar{f}(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Le théorème est également valable pour une fonction $f(x)$ intégrable sur un intervalle $[a, b]$ quelconque, étant donné qu'on peut toujours ramener cet intervalle à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ moyennant un changement linéaire de variables.

§ 3. Convergence de la série de Fourier en un point

Etudions en détail la question de la convergence des séries de Fourier en un point. Il nous faudra transformer préalablement l'expression des sommes partielles de la série de Fourier. Etant donné que les termes de la série de Fourier sont des fonctions périodiques, on peut admettre dans les raisonnements qui suivent que la fonction $f(x)$ est périodique de période 2π. On peut réaliser cette condition, sans modifier les coefficients de la série de Fourier si l'on prolonge la fonction $f(x)$ en dehors de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ en la considérant comme périodique de période 2π. On a

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\cos kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks\, ds + \sin kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks\, ds \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos ks + \sin kx \sin ks) \right] ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s - x) \right] ds$$

(dans les expressions de a_k et b_k la variable d'intégration est désignée par s).

Calculons la somme dans l'expression sous le signe d'intégration en nous servant de la formule de la somme d'une progression géométrique :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,\frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\,\frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} =$$

$$= \frac{\sin\,[(n + 1/2)x]}{2\sin\,(x/2)}.$$

Ainsi donc,

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(s - x)\,\mathrm{d}s,$$

où $D_n(x) = \dfrac{\sin\,[(n + 1/2)x]}{2\pi\sin\,(x/2)}$.

Posant $s = t + x$, on trouve

$$f_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{-\pi-x}^{-\pi} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\pi-x}^{\pi} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La seconde et la troisième intégrales sont égales entre elles : pour s'en assurer, il suffit de remplacer t par $t - 2\pi$ dans la seconde intégrale et d'utiliser les égalités $f(x - 2\pi) = f(x)$, $D_n(x - 2\pi) = D_n(x)$. Donc

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x)D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Voyons quelques propriétés des fonctions $D_n(x)$. Soit $f(x) \equiv 1$. Les coefficients de Fourier sont alors tous nuls sauf a_0, et donc $f_n(x) \equiv 1$. Par conséquent, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. En outre, il est évident que $D_n(-x) = D_n(x)$. Pour l'étude de la convergence des séries de Fourier et la généralisation de la notion de série de Fourier nous aurons besoin de la propriété suivante des intégrales contenant des fonctions trigonométriques : *les intégrales* $I(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t$, $\bar{I}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t$ *convergent vers zéro lorsque* $\lambda \to +\infty$ *si* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ *et la fonction* $g(x)$ *est bornée.*

Cherchons à expliquer un tel comportement des intégrales $I(x, \lambda)$ et $\bar{I}(x, \lambda)$. A cet effet, transformons-les préalablement en remplaçant t par

$t + \pi/\lambda$:

$$I(x, \lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + x + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos \lambda t \, dt,$$

$$\bar{I}(x, \lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + x + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin \lambda t \, dt.$$

En prenant la demi-somme des expressions de $I(x, \lambda)$ et $\bar{I}(x, \lambda)$, on obtient la majoration :

$$|I(x, \lambda)| = \frac{1}{2}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right] \cos \lambda t \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right| dt, \quad s = t + x,$$

$$|\bar{I}(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right| dt.$$

La quantité π/λ étant petite, pour des grands λ les intégrales $I(x, \lambda)$ et $\bar{I}(x, \lambda)$ sont également petites. D'abord prouvons ceci pour le cas où l'intégration a lieu sur un intervalle fini et l'une des fonctions $f(x)$, $g(x)$ est égale à l'unité.

Lemme 1. *Si la fonction $f(x)$ est intégrable sur un intervalle $[a - \omega, b + \omega]$, alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour $|x| < \delta \leqslant \omega$ l'on a l'inégalité*

$$\int_a^b |f(t + x) - f(t)| \, dt < \varepsilon.$$

☐ La fonction $f(x)$ étant intégrable sur l'intervalle $[a - \omega, b + \omega]$, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ on peut choisir une fonction continue $\bar{f}(x)$ telle que $\int_{a-\omega}^{b+\omega} |f(t) - \bar{f}(t)| \, dt < \varepsilon_1$. Or,

$$\int_a^b |f(t + x) - f(t)| \, dt = \int_a^b |[\bar{f}(t + x) - \bar{f}(t)] + [f(t + x) - \bar{f}(t + x)] -$$

$$- [f(t) - \bar{f}(t)]|dt \leqslant \int_a^b |\bar{f}(t + x) - \bar{f}(t)|dt +$$

$$+ \int_a^b |f(t + x) - \bar{f}(t + x)|dt + \int_a^b |f(t) - \bar{f}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1 + \int_a^b |\bar{f}(t + x) - \bar{f}(t)|dt,$$

puisque

$$\int_a^b |f(t + x) - \bar{f}(t + x)|dt = \int_{a+x}^{b+x} |f(t) - \bar{f}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{a-\omega}^{b+\omega} |f(t) - \bar{f}(t)|dt < \varepsilon_1,$$

$$\int_a^b |f(t) - \bar{f}(t)|dt \leqslant \int_{a-\omega}^{b+\omega} |f(t) - \bar{f}(t)|dt < \varepsilon_1.$$

D'autre part, d'après le théorème sur la dépendance continue par rapport au paramètre d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on a

$$\lim_{x \to 0} \int_a^b |\bar{f}(t + x) - \bar{f}(t)|dt = 0$$

et donc il existe un δ tel que pour $|x| < \delta$ on a l'inégalité

$$\int_a^b |\bar{f}(t + x) - \bar{f}(t)|dt < \varepsilon_1.$$

Alors, pour $|x| < \delta$, on a

$$\int_a^b |f(t + x) - f(t)|dt < 3\varepsilon_1.$$

Reste à choisir la quantité ε_1 à partir de la condition $3\varepsilon_1 = \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque. ■

Le lemme que nous venons de démontrer nous permet d'estimer le comportement, pour $\lambda \to +\infty$, des intégrales du type

$$I(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t) \cos \lambda t \, dt,$$

$$\bar{I}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t) \sin \lambda t \, dt$$

en profitant des estimations

$$|I(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(t + x + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t + x)g(t) \right| dt,$$

$$|\bar{I}(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(t + x + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t + x)g(t) \right| dt$$

obtenues plus haut.

Lemme 2. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables sur tout intervalle fini, la fonction $g(x)$ étant bornée et l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds$, convergente. Les intégrales*

$$I(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t) \cos \lambda t \, dt,$$

$$\bar{I}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x)g(t) \sin \lambda t \, dt$$

convergent alors vers zéro pour $\lambda \to +\infty$ uniformément sur tout intervalle $|x| \leqslant a$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x| \leqslant a$ il existe un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\varepsilon)$ tel que pour $\lambda > \bar{\lambda}$ on a les inégalités $|I(x, \lambda)| < \varepsilon$, $|\bar{I}(x, \lambda)| < \varepsilon$.

□ Nous allons prouver le lemme pour l'intégrale $I(x, \lambda)$, le cas de $\bar{I}(x, \lambda)$ étant parfaitement analogue. Posons $s = t + x$, on a

$$|I(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right| dt.$$

D'où $|I(x ; \lambda)| \leqslant I_N^{(1)} + I_N^{(2)}$, où

$$I_N^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{|t| \geqslant N} \left| f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right| dt,$$

$$I_N^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{|t| \leqslant N} \left| f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)g(t) \right| dt.$$

Estimons les intégrales $I_N^{(1)}$ et $I_N^{(2)}$ pour $|x| \leqslant a$, $\lambda \geqslant \pi$. Comme pour $|t| \geqslant N$, on a $|s| \geqslant N - a$, $|s + \pi/\lambda| \geqslant N - a - 1$, on a

$$I_N^{(1)} \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{|t| \geqslant N} \left[\left|f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\left|g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| + |f(s)|\,|g(t)|\right] \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2} \int\limits_{|t| \geqslant N} \left[\left|f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| + |f(s)|\right] \mathrm{d}t \leqslant M \int\limits_{|s| \geqslant N-a-1} |f(s)|\,\mathrm{d}s,$$

où $M = \sup\limits_t |g(t)|$.

L'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,\mathrm{d}s$ est convergente ; par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N = N(\varepsilon)$ tel que $M \int\limits_{|s| \geqslant N-a-1} |f(s)|\,\mathrm{d}s < \varepsilon/2$. Dans ce cas $I_N^{(1)} < \varepsilon/2$. Pour N choisi, estimons l'intégrale $I_N^{(2)}$ en tenant compte du fait que pour $|t| \leqslant N$, on a $|s| \leqslant N + a$, $|s + \pi/\lambda| \leqslant N + a + 1$. Posons $M_1 = \sup\limits_{|s| \leqslant N+a} |f(s)|$, il vient

$$I_N^{(2)} = \int\limits_{|t| \leqslant N} \left|\left[f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)\right] g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(t)\right] f(s)\right| \mathrm{d}t \leqslant M \int\limits_{|s| \leqslant N+a} \left|f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - f(s)\right| \mathrm{d}s + M_1 \int\limits_{|t| \leqslant N} \left|g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(t)\right| \mathrm{d}t.$$

En vertu du lemme 1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\varepsilon)$ tel que pour $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$ l'on a les inégalités

$$M \int\limits_{|s| \leqslant N+a} \left|f\left(s + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(s)\right| \mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$M_1 \int\limits_{|t| \leqslant N} \left|g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(t)\right| \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc pour $\lambda \geqslant \bar{\lambda}(\varepsilon)$ on a $I_N^{(2)} < \varepsilon/2$, autrement dit, pour $\lambda \geqslant \bar{\lambda}(\varepsilon)$ on a l'inégalité $|I(x, \lambda)| \leqslant I_N^{(1)} + I_N^{(2)} < \varepsilon$. ■

Etablissons maintenant les conditions de convergence des séries de Fourier.

Théorème. *Soit une fonction $f(x)$ intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et périodique de période 2π. Si au point considéré x existent des limites $f(x-0)$, $f(x+0)$ et la fonction admet une dérivée bornée sur les intervalles $]x-\delta_0, x[$, $]x, x+\delta_0[$, $\delta_0 > 0$, la série de Fourier converge au point x donné vers $[f(x-0)+f(x+0)]/2$. Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée bornée sur un intervalle $[a, b]$ arbitraire, la série de Fourier converge uniformément vers la fonction $f(x)$ sur tout intervalle $[a_1, b_1]$ si $a < a_1 < b_1 < b$.*

□ Pour la somme partielle $f_n(x)$ de la série de Fourier on a la représentation

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

où

$$D_n(x) = \frac{\sin \lambda_n x}{2\pi \sin(x/2)}, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

La fonction $D_n(x)$ présente les propriétés suivantes : $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $D_n(-x) = D_n(x)$. On en tire, en particulier, les égalités $\int_{-\pi}^{-\delta} D_n(t)\,\mathrm{d}t =$

$$= \int_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout} \quad \delta > 0, \delta < \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$f_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \int_{-\pi}^{0} [f(t+x) - f(x-0)] D_n(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} [f(t+x) - f(x+0)] D_n(t)\,\mathrm{d}t = I_n(\delta, x) + \bar{I}_n(\delta, x),$$

où

$$I_n(\delta, x) = \int_{-\delta}^{0} [f(t + x) - f(x - 0)]D_n(t)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{\delta}[f(t + x) - f(x + 0)]D_n(t)\,dt,$$

$$\bar{I}_n(\delta, x) = \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(t + x)D_n(t)\,dt -$$

$$- \frac{[f(x - 0) + f(x + 0)]}{2} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} D_n(t)\,dt.$$

Estimons $I_n(\delta, x)$. Les fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$ étant périodiques de période 2π, il suffit de se borner au cas de $|x| \leqslant \pi$. Si $|f'(s)| \leqslant M$ pour $s \in]x - \delta_0, x[$ ou $s \in]x, x + \delta_0[$, la formule de Lagrange des accroissements finis nous donne pour $\delta < \delta_0 < \pi$:

$$|f(t + x) - f(x - 0)| = |f'(\xi)t| \leqslant M|t|$$

pour $-\delta \leqslant t \leqslant 0$, $\xi \in]x - \delta, x[$. De façon analogue, $|f(t + x) - f(x + 0)| \leqslant Mt$ pour $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Donc pour $\delta < \delta_0$

$$|I_n(\delta, x)| \leqslant M \int_{-\delta}^{\delta} |tD_n(t)|\,dt \leqslant M\delta,$$

puisque

$$|tD_n(t)| \leqslant \left|\frac{t}{2\pi \sin (t/2)}\right| \leqslant \frac{1}{2} \text{ pour } |t| \leqslant \pi.$$

Ayant obtenu $|I_n(\delta, x)| \leqslant M\delta$, on peut choisir un δ aussi petit que l'on veut pour que $|I_n(\delta, x)| < \varepsilon/2$ pour tout $\varepsilon > 0$. Estimons la quantité $\bar{I}_n(\delta, x)$. Il vient

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(t + x)D_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t + x)g(t) \sin \lambda_n t\,dt,$$

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} D_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + x)g(t) \sin \lambda_n t\,dt,$$

où $\lambda_n = n + 1/2$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pour } |x| \leqslant 2\pi, \\ 0 \quad \text{pour } |x| > 2\pi, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } |x| \leqslant 2\pi, \\ 0 \text{ pour } |x| > 2\pi, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \sin (x/2)} & \text{pour } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi, \\ 0 & \text{pour } \quad |x| < \delta. \end{cases}$$

D'après le lemme 2, les intégrales $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t + x)g(t) \sin \lambda_n t \, dt$ et $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + x)g(t) \sin \lambda_n t \, dt$ convergent, pour $n \to \infty$, uniformément vers zéro sur tout intervalle $|x| \leqslant a$. Il existe donc un N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a l'inégalité

$$|\bar{I}_n(\delta, x)| \leqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t + x)g(t) \sin \lambda_n t \, dt \right| + $$
$$+ \frac{|f(x - 0) + f(x + 0)|}{2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + x)g(t) \sin \lambda_n t \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi donc, pour $n \geqslant N$, on a

$$\left| f_n(x) - \frac{f(x - 0) + f(x + 0)}{2} \right| \leqslant |I_n(\delta, x)| + |\bar{I}_n(\delta, x)| < \varepsilon.$$

La première assertion du théorème est démontrée. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ admet une dérivée bornée sur l'intervalle $[a, b]$ et $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Alors la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a_1, b_1]$ (i.e. $[f(x - 0) + f(x + 0)]/2 = f(x)$) et, en outre, $|f'(t + x)| \leqslant M$ (M est une constante) pour $|t| \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, où $\delta_0 = \min (b - b_1, a_1 - a)$ si $a < a_1 < b_1 < b$. La quantité δ peut donc être choisie indépendante de x. En outre, $\left|\dfrac{f(x - 0) + f(x + 0)}{2}\right| = |f(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$ et, comme le suggère l'estimation de $\bar{I}_n(\delta, x)$, le numéro N peut être choisi commun pour tous les $x \in [a_1, b_1]$. Il découle précisément de ces raisonnements que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N = N(\varepsilon)$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est-à-dire que les sommes partielles $f_n(x)$ de la série de Fourier convergent vers la fonction $f(x)$ uniformément sur l'intervalle $[a_1, b_1]$.■

On peut construire la série de Fourier pour une fonction qui soit donnée uniquement sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, puisque pour calculer les coefficients de Fourier on a besoin de connaître seules les valeurs de la fonction sur cet intervalle. Afin d'éclaircir la question de convergence de la série de Fourier dans ce cas, posons $\varphi(x) = f(x)$ pour $-\pi \leqslant x < \pi$, $\varphi(x + 2\pi k) = \varphi(x)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ La fonction $\varphi(x)$ est périodique et de plus les coefficients de Fourier et, partant, les séries de Fourier, coïncident pour les

fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$. Ainsi donc, pour des conditions considérées plus haut, la série de Fourier converge pour $x \in]-\pi, \pi[$ vers $[f(x-0)+ f(x+0)]/2$, et pour $x = \pm\pi$, vers $[\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)]/2 = [f(-\pi+0)+f(\pi-0)]/2$.

On établit de même les conditions de convergence uniforme de la série de Fourier sur un intervalle arbitraire.

Remarque. En pratique, on utilise souvent la représentation d'une fonction $f(x)$ en série suivant des fonctions trigonométriques non sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, mais sur l'intervalle $[-l, l]$, $l > 0$. Les formules correspondantes s'obtiennent de la représentation de $f(x)$ en série de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, en remplaçant x par $\pi x/l$. La série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $[-l, l]$ s'écrit donc

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{\pi}{l}kx\right],$$

où

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt.$$

Le théorème précédent sur la convergence de la série de Fourier est valable dans ce cas sans aucune modification, à condition de remplacer l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par l'intervalle $[-l, l]$ et la période 2π par la période $2l$.

§ 4. Estimation du reste de la série de Fourier. Phénomène de Gibbs

Etudions la question de la rapidité de convergence de la série de Fourier dans le cas où la fonction $f(x)$ admet une dérivée d'ordre $m+1$.

Théorème. *Supposons qu'une fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre m compris sont continues sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, que $f^{(l)}(-\pi) = f^{(l)}(\pi)$ pour $l \leqslant m$ et la dérivée $f^{(m+1)}(x)$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Alors la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de $f(x)$ en diffère d'une quantité $o(1/N^{m+1/2})$ lorsque $N \to \infty$.*

□ Démontrons le théorème pour $m = 0$. Transformons les expressions des coefficients de Fourier en appliquant l'intégration par parties. Pour $k > 0$ on a

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$$

$$-\frac{1}{k}\left.\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin kt\,\mathrm{d}t\right| = -\frac{b_k^{(')}}{k},\quad b_k = a_k^{(')}/k,$$

où $a_k^{(')}$, $b_k^{(')}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $f'(x)$. Si S_N est la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de la fonction $f(x)$, alors

$$|f(x) - f_N(x)| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} [|a_k| + |b_k|] = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(')}| + |b_k^{(')}|}{k},$$

puisque $|\cos kx| \leqslant 1$, $|\sin kx| \leqslant 1$. L'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky et l'inégalité $[|a_k^{(')}| + |b_k^{(')}|]^2 \leqslant 2[|a_k^{(')}|^2 + |b_k^{(')}|^2]$ aidant, on trouve

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(')}| + |b_k^{(')}|}{k} \leqslant \sqrt{2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}[|a_k^{(')}|^2 + |b_k^{(')}|^2]}.$$

La série $\sum_{k=N+1}^{\infty} [|a_k^{(')}|^2 + |b_k^{(')}|^2]$ converge en vertu de l'inégalité de Bessel pour la fonction $f^{(')}(x)$, donc

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} [|a_k^{(')}|^2 + |b_k^{(')}|^2] = o(1),\quad N \to \infty.$$

D'autre part, $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et, partant,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{N}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{N}.$$

Donc

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(')}| + |b_k^{(')}|}{k} = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),\quad N \to \infty,$$

i.e. $f(x) - f_N(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, $N \to \infty$. Le théorème est prouvé pour $m = 0$.

La démonstration est analogue dans le cas où $m > 0$, seulement il faut appliquer aux coefficients de Fourier une intégration par parties $m + 1$ fois. On obtient l'estimation

$$|f(x) - f_N(x)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(m+1)}| + |b_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}},$$

où $a_k^{(m+1)}$, $b_k^{(m+1)}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $f^{(m+1)}(x)$. Comme

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(m+1)}| + |b_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(m+1)}} \sum_{k=N+1}^{\infty} [|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2]},$$

il s'ensuit de la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} [|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2]$ et de l'estimation

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(m+1)}} \leqslant \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^{2(m+1)}} = O\left(\frac{1}{N^{2m+1}}\right)$$

que $f(x) - f_N(x) = o\left(\frac{1}{N^{m+1/2}}\right)$, $N \to \infty$. ■

Etudions le comportement des sommes partielles de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ en ses points de discontinuité. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π continue par morceaux admettant une dérivée bornée aux intervalles de continuité et telle qu'aux points de discontinuité $f(x) = [f(x - 0) + f(x + 0)]/2$. Comme montré plus haut, les sommes partielles $f_n(x)$ de la série de Fourier de $f(x)$ convergent vers $f(x)$ en tous les points, la convergence étant uniforme sur tout intervalle exempt de points de discontinuité. On montre que dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point de discontinuité x il existe des points $\tilde{x}$ tels que, quel que

soit $n \geqslant N$, on a

$$\left|f_n(\bar{x}) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| > L\left|f(\bar{x}) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| \approx$$
$$\approx L\,\frac{|f(x+0)-f(x-0)|}{2},$$

où $L > 1$ est une constante. Cette « anomalie » du comportement des sommes partielles de la série de Fourier fut révélée par une voie purement empirique par J. Gibbs et porte le nom de ***phénomène de Gibbs***. Considérons ce phénomène sur l'exemple de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } -\pi \leqslant x < 0, \\ \;\;\,0 \text{ pour } \qquad x = 0, \\ \;\;\,1 \text{ pour } \quad \pi \geqslant x > 0, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

La série de Fourier de cette fonction s'écrit $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$. Calculons la somme partielle $f_{2n-1}(x)$:

$$f_{2n-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^x\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)t\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)t = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{(2k+1)it} =$$
$$= \operatorname{Re}\frac{\mathrm{e}^{(2n+1)it}-\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{2it}-1} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2nt}{\sin t},$$

alors

$$f_{2n-1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2n\sin\frac{u}{2n}}\mathrm{d}u, \qquad u = 2nt.$$

Comme $\dfrac{u}{2n \sin \dfrac{u}{2n}} = 1 + o(1)$ pour $n \to \infty$, $0 < u \leqslant \pi$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} \, du = L.$$

Montrons que $L > 1$ en attirant l'égalité $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \, du = \frac{\pi}{2}$ (cf. exercice 6 en fin du § 13, chap. 6). On a

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin u}{u} \, du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + \pi k} \, du.$$

La série dans le second membre de cette égalité est alternée à termes strictement décroissants avec l'accroissement de k. La somme de cette série est donc inférieure à son premier terme, c'est-à-dire que

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} \, du, \text{ d'où } L = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} \, du > 1.$$

Ainsi donc, on a pour la fonction considérée

$$\lim_{n \to \infty} \left| f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f(0) \right| = L > 1 = \frac{|f(0+0) - f(0-0)|}{2},$$

ce qui confirme qu'on a effectivement pour cette fonction le phénomène de Gibbs.

Exemple. Construisons la série de Fourier de la fonction $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. On a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx.$$

Dans ce cas $a_k = 0$, puisque la fonction $x \cos kx$ est une fonction impaire et l'intégrale est prise entre les bornes symétriques. Appliquons une intégration par parties pour calculer b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[- \frac{x \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right] = (-1)^{k-1} \frac{2}{k}.$$

Donc pour $|x| < \pi$ on a

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{k} \sin kx.$$

Exercice. Développer en série de Fourier la fonction $f(x) =$ $=$ Arc sin (cos x) et étudier la convergence de cette série.

§ 5. Intégrale de Fourier

Reprenons la relation limite déjà démontrée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin \lambda_n t}{2\pi \sin (t/2)} \, dt = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \quad \lambda_n = n + 1/2.$$

Pour des λ_n assez élevés, la contribution à l'intégrale n'est apportée que par le domaine des t suffisamment petits, où sin $(t/2)$ diffère peu de $t/2$. Donc, pour certaines restrictions imposées à la fonction $f(x)$, cette relation peut être remplacée par une relation plus générale :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin \lambda t}{t} \, dt = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Le second membre de cette dernière relation porte le nom d'*intégrale de Fourier* de la fonction $f(x)$.

Remarque. En pratique, on utilise d'ordinaire une autre écriture de l'intégrale de Fourier. Etant donné que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\sin \lambda t}{t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{\sin \lambda (s-x)}{s-x} \, ds$$

et

$$\frac{\sin \lambda (s-x)}{s-x} = \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos \mu (s-x) \, d\mu,$$

on peut écrire l'intégrale de Fourier sous la forme

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \, ds \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos \mu (s-x) \, d\mu = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

D'autre part, $|f(s)\cos\mu(s-x)| \leqslant |f(s)|$ et pour les fonctions vérifiant la condition $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,ds < \infty$ on peut intervertir l'ordre d'intégration suivant les variables s et μ d'après le théorème sur l'intégration suivant le paramètre des intégrales impropres dépendant de paramètres, d'où

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} d\mu[\cos\mu x F_1(\mu) + \sin\mu x F_2(\mu)],$$

où

$$F_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\mu s\,ds, \qquad F_2(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin\mu s\,ds.$$

Moyennant les formules $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ on peut représenter la série de Fourier et l'intégrale de Fourier sous forme symétrique

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

avec $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$;

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(\mu)e^{i\mu x}\,d\mu,$$

où $F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}\,dx.$

Il est d'usage de noter $\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\,e^{i\mu x}\,d\mu$ la limite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} F(\mu)\,e^{-i\mu x}d\mu$, puisque celle-ci est la valeur principale de cette intégrale.

Indiquons les conditions pour lesquelles l'intégrale de Fourier que nous allons écrire sous la forme

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

converge vers $[f(x-0)+f(x+0)]/2$.

Théorème. *Supposons que la fonction $f(x)$ est donnée sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge. Si au point considéré x existent les limites $f(x-0)$, $f(x+0)$ et la fonction admet une dérivée bornée sur les intervalles $]x-\delta_0, x[$, $]x, x+\delta_0[$, $\delta_0 > 0$, alors l'intégrale de Fourier converge au point donné vers $[f(x-0)+f(x+0)]/2$. Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée bornée sur un certain intervalle $[a, b]$ pour $b - a < 2\pi$, l'intégrale de Fourier converge vers la fonction $f(x)$ uniformément sur tout intervalle $[a_1, b_1]$ à condition que $a < a_1 < b_1 < b$.*

□ Soit $x \in]c, c+2\pi[$ et $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \in [c, c+2\pi]$. Prolongeons la fonction $\varphi(x)$ en dehors de l'intervalle $[c, c+2\pi[$ en la supposant périodique de période 2π. Soit $\lambda = \lambda_n + \alpha$, où $\lambda_n = n + 1/2$, n est un entier positif, $0 \leqslant \alpha < 1$ et $\varphi_n(x)$ est la somme partielle des n termes de la série de Fourier de la fonction $\varphi(x)$. Les assertions de ce théorème découlent du théorème (p. 234) si l'on montre que pour $\lambda \to +\infty$ la différence

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \varphi_n(x)$ converge vers zéro uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $c < a < b < c + 2\pi$. Comme

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x)\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin(t/2)}\,dt,$$

alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \varphi_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}\left[f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t} - \varphi(t+x)\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin(t/2)}\right]dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\varphi(t+x)\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin(t/2)}\,dt =$$

$$= I_1(x,\lambda) + I_2(x,\lambda) - I_3(x,\lambda).$$

Si l'on choisit δ de façon à avoir $[x-\delta, x+\delta] \subset [c, c+2\pi]$ pour $x \in [a, b]$, alors on a $\varphi(t+x) = f(t+x)$ pour $|t| \leqslant \delta$. Donc

$$I_1(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} f(t+x)\psi(t,\lambda)\,dt,$$

où

$$\psi(t, \lambda) = \frac{\sin \lambda t}{t} - \frac{\sin \lambda_n t}{2 \sin (t/2)} = \frac{\sin \lambda t - \sin \lambda_n t}{t} +$$
$$+ \sin \lambda_n t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin (t/2)}\right) = \alpha \sin \lambda_n t \frac{\cos \alpha t - 1}{\alpha t} +$$
$$+ \alpha \cos \lambda_n t \frac{\sin \alpha t}{\alpha t} + \sin \lambda_n t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin (t/2)}\right).$$

D'où

$$|\psi(t, \lambda)| \leqslant \left|\frac{\cos \alpha t - 1}{\alpha t}\right| + \left|\frac{\sin \alpha t}{\alpha t}\right| + \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin (t/2)}\right|.$$

Vu que les fonctions $(\cos t - 1)/t$, $(\sin t)/t$, $1/t - 1/(2 \sin (t/2))$ convergent vers une limite finie lorsque $t \to 0$ et sont continues pour $0 < |t| \leqslant \pi$, la fonction $\psi(t, \lambda)$ vérifie l'inégalité $|\psi(t, \lambda)| \leqslant A$ pour $|t| \leqslant \pi$ (A est une constante). Donc

$$|I_1(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |f(t + x)| \, |\psi(t, \lambda)| \, \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant A \sup_{x \in [c, c + 2\pi]} |f(x)| \frac{2\delta}{\pi}.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir δ suffisamment petit pour que l'on ait l'inégalité $|I_1(x, \lambda)| < \varepsilon/3$ pour $x \in [a, b]$. Avec δ ainsi choisi, les intégrales

$$I_2(x, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant \delta} f(t + x) \frac{\sin \lambda t}{t} \, \mathrm{d}t,$$
$$I_3(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \varphi(t + x) \frac{\sin \lambda_n t}{2 \sin (t/2)} \, \mathrm{d}t$$

convergent uniformément vers zéro pour $\lambda \to +\infty$, $x \in [a, b]$ d'après le lemme 2 du § 3. (La démonstration est analogue à celle du théorème du § 3.) Il doit exister donc un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\varepsilon)$ tel que

$$|I_2(x, \lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_3(x, \lambda)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour} \quad \lambda \geqslant \bar{\lambda}, \quad x \in [a, b].$$

Ainsi donc, pour $\lambda \geqslant \bar{\lambda}(\varepsilon)$, $x \in [a, b]$ on a

$$\left|\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \frac{\sin \lambda t}{t} \, \mathrm{d}t - \varphi_n(x)\right| \leqslant |I_1(x, \lambda)| +$$
$$+ |I_2(x, \lambda)| + |I_3(x, \lambda)| < \varepsilon. \blacksquare$$

CHAPITRE 9

INTÉGRALES MULTIPLES

§ 1. Ensembles Jordan-mesurables

Pour les ensembles multidimensionnels, on peut introduire les notions analogues à celle de longueur de segment. C'est la *mesure de l'ensemble*. Dans le cas bidimensionnel, c'est l'aire de l'ensemble, dans le cas tridimensionnel, c'est le volume. Introduisons d'abord la notion de mesure pour l'ensemble le plus simple, à savoir le parallélépipède rectangle multidimensionnel. Soit A un parallélépipède $a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + h_i$, $i = 1, \ldots, m$, dans l'espace des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (dans les cas bi- et tridimensionnel ce sont respectivement le rectangle et le parallélépipède d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées). Appelons mA la mesure de cet ensemble et définissons-la comme suit

$$mA = \prod_{i=1}^{m} h_i.$$

Si $h_i = h$ (h_i ne dépend pas de i), le parallélépipède est un cube. Considérons maintenant un ensemble A composé de parallélépipèdes orthogonaux A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, qui, s'ils se coupent, le font uniquement suivant leurs frontières (c'est-à-dire que les ensembles A_j ou bien ne se coupent pas, ou bien leurs points d'intersection sont leurs points frontières). Convenons d'appeler un tel ensemble, *figure élémentaire*. Définissons comme suit la mesure de la figure élémentaire :

$$mA = \sum_{j=1}^{n} mA_j.$$

Convenons que la mesure d'un ensemble vide est nulle. Indiquons quelques propriétés de la mesure des figures élémentaires :

1° *Si $A \subset B$, alors $mA \leqslant mB$.*

2° *La réunion $A + B$ de deux figures élémentaires A et B est une figure élémentaire et $m(A + B) \leqslant mA + mB$.*

L'égalité n'a lieu que lorsque les ensembles A et B se coupent et le font suivant une partie de leurs frontières.

3° *Si l'on coupe une figure élémentaire A par un plan $x_j =$ const ortho-*

gonal à l'un des axes (de numéro j), la coupure en fait deux figures élémentaires, A' et A'', et $mA = mA' + mA''$.

La notion de mesure d'une figure élémentaire permet d'introduire celle d'un ensemble. Considérons à cet effet dans un espace m-dimensionnel un réseau composé de cubes $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h = 1/2^N$, N, un entier >0. Avec l'augmentation de N d'une unité chaque cube du réseau se partage en 2^m cubes. Si A est un ensemble borné dans un espace m-dimensionnel, on peut considérer des figures élémentaires $\bar{A}_N$ et $\underline{A}_N$ composées de cubes du réseau $\bar{A}_N$ étant composée de tous les cubes qui renferment au moins un point de l'ensemble A, et $\underline{A}_N$, de tous les cubes qui comportent uniquement les points intérieurs de l'ensemble A. Avec l'augmentation de N la quantité $m\bar{A}_N$ ne peut que diminuer et la quantité $m\underline{A}_N$ ne peut qu'augmenter. Ainsi donc, les suites $\{m\bar{A}_N\}$ et $\{m\underline{A}_N\}$ sont respectivement strictement décroissante et strictement croissante, et $m\underline{A}_N \leqslant m\bar{A}_N$. Comme $m\bar{A}_N \leqslant m\bar{A}_1$, $m\underline{A}_N \geqslant m\underline{A}_1$, on a $m\underline{A}_N \leqslant m\bar{A}_1$, $m\bar{A}_N \geqslant m\underline{A}_1$, ce qui signifie que la suite $\{m\bar{A}_N\}$ est décroissante et minorée, et la suite $\{m\underline{A}_N\}$, croissante et majorée. Il existe donc des limites $m_i A = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N$ et $m_e A = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N$ qui s'appellent respectivement *mesure intérieure* et *mesure extérieure* au sens de Jordan de l'ensemble A. L'ensemble A est dit *mesurable au sens de Jordan,* ou *Jordan-mesurable,* si $m_i A = m_e A = mA$.

Le nombre mA s'appelle *mesure de Jordan* de l'ensemble A (dans la suite, on dira mesure tout court). Indiquons quelques propriétés des ensembles mesurables, outre la propriété évidente qui consiste en ce qu'un ensemble mesurable est borné.

Prouvons tout d'abord que la mesure de la frontière d'un ensemble mesurable est nulle. Rappelons qu'on entend par *point frontière d'un ensemble A* un point de l'espace vectoriel dont tout voisinage contient à la fois des points appartenant et n'appartenant pas à l'ensemble A.

Théorème. *Pour qu'un ensemble borné A soit mesurable, il faut et il suffit que sa frontière Γ soit de mesure nulle.*

□ La figure $\bar{A}_N$ diffère de la figure $\underline{A}_N$ par des cubes qui contiennent des points frontières de l'ensemble A, c'est-à-dire que $m\bar{A}_N = m\underline{A}_N + m\bar{\Gamma}_N$. Si donc l'ensemble A est mesurable, à savoir si $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N$, on a $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = 0$. Comme $0 \leqslant m\underline{\Gamma}_N \leqslant m\bar{\Gamma}_N$, on a aussi $\lim\limits_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N = 0$, ou encore $m\Gamma = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N = 0$. Supposons maintenant que l'ensemble Γ est mesurable et $m\Gamma = 0$. Ce qui signifie que $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = 0$,

et donc $\lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N$. Par conséquent, l'ensemble A est mesurable. ■

Voyons quelques exemples d'ensembles de mesure nulle lesquels peuvent constituer une partie de frontières d'ensembles mesurables.

Théorème. *Si les points $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ d'un espace $(m - 1)$-dimensionnel appartiennent à un ensemble M borné et fermé et la fonction $f(x_1, \ldots, x_{m-1})$ est continue sur cet ensemble, l'ensemble S défini par l'équation $x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})$, $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in M$, est de mesure nulle dans l'espace m-dimensionnel.*

□ La fonction $f(x_1, \ldots, x_{m-1})$ étant uniformément continue sur l'ensemble M, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x_1', \ldots$ $\ldots, x_{m-1}') - f(x_1, \ldots, x_{m-1})| < \varepsilon$ si $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m-1} (x_i' - x_i)^2} < \delta$. Ainsi donc, si l'inégalité précédente a lieu, on a pour les points de l'ensemble S : $|x_m' - x_m| < \varepsilon$. Considérons un réseau de cubes d'arête $<\delta/\sqrt{m}$: $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $h = 1/2^N$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $h < \delta/\sqrt{m}$. Dans l'espace des variables $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ on a alors le réseau de cubes $(m - 1)$-dimensionnels d'arête égale à h. L'ensemble M étant borné, il en est de même de la fonction $x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})$, de ce fait, l'ensemble de points $(x_1, \ldots, x_m)$, où $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in M$, $x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1})$, est borné. Donc dans l'espace m-dimensionnel il existe un cube d'arête l (l est un entier), composé à partir de cubes du réseau, qui renferme l'ensemble M. Introduisons en considération les cubes du réseau $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, à $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ fixes, faisant partie du cube donné. Le nombre de tels cubes est égal à l/h. Parmi ces cubes, seuls contiennent les points de l'ensemble S les cubes dont la variable x_m varie d'au plus ε, puisque pour deux points quelconques $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ et $(x_1', \ldots, x_{m-1}')$ d'un même cube $(m - 1)$-dimensionnel on a l'inégalité $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m-1} (x_i' - x_i)^2} \leqslant h\sqrt{m} < \delta$. Le nombre de tels cubes est au plus égal au nombre minimal de segments du réseau $k_m h \leqslant x_m \leqslant (k_m + 1)h$ de longueur h qui dans leur ensemble contiennent le segment de longueur ε, c'est-à-dire ne dépasse pas $\varepsilon/h + 2$, ce qui est inférieur au nombre total des cubes pour $k_1, \ldots, k_{m-1}$ fixes de $(\varepsilon/h + 2)/(l/h) = (\varepsilon + 2h)/l$ fois. Puisque ces raisonnements sont valables pour $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ quelconques, la mesure commune des cubes contenant les points de l'ensemble S ne dépasse pas $(\varepsilon + 2h)l^m/l$, d'où $m\bar{S}_N \leqslant (\varepsilon + 2h)l^m/l$. Les nombres ε, h étant aussi petits que l'on veut, on a $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{S}_N = 0$. Or, $m\underline{S}_N \leqslant m\bar{S}_N$, donc $\lim\limits_{N\to\infty} m\underline{S}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{S}_N = mS = 0$. ■

Théorème. *Soient A_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, des ensembles mesurables. Alors sont mesurables les ensembles $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ et $\tilde{A} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$. Si, en outre, les ensembles A_i se coupent au plus suivant une partie de leurs frontières, on a $mA = \sum_{i=0}^{n-1} mA_i$.*

□ La frontière Γ de l'ensemble A ne peut se composer que des points frontières de l'ensemble A_i. Donc $m\overline{\Gamma}_N \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} m\overline{\Gamma}_{iN}$. Or, $\lim_{N\to\infty} m\overline{\Gamma}_{iN} = m\Gamma_i = 0$; par conséquent,

$$m\Gamma = \lim_{N\to\infty} m\overline{\Gamma}_N = \lim_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N = 0,$$

ce qui veut dire que l'ensemble A est mesurable. On démontre en parfaite analogie la mesurabilité de l'ensemble $\tilde{A}$. Supposons maintenant que les ensembles A_i se coupent au plus suivant une portion de leurs frontières. Considérons un réseau de cubes d'arête $h = 1/2^N$. Les cubes faisant partie de la figure élémentaire $\underline{A}_N$ peuvent être partagés en deux groupes : ceux appartenant à l'un des ensembles $\underline{A}_{iN}$ et ceux qui ont des points communs avec les frontières des ensembles A_i. Notons α_N la mesure des cubes du second groupe. Il est évident que $\alpha_N \to 0$ lorsque $N \to \infty$, car $\sum_{i=0}^{n-1} m\Gamma_i = 0$. Ensuite,

$$m\underline{A}_N = \sum_{i=0}^{n-1} m\underline{A}_{iN} + \alpha_N.$$

Passant à la limite pour $N \to \infty$, on trouve $mA = \sum_{i=0}^{n-1} mA_i$. ■

§ 2. Notion d'intégrale multiple (au sens de Riemann)

Soit A un ensemble mesurable dans un espace m-dimensionnel dans lequel est définie une fonction $f(x)$. Partageons cet ensemble en parties mesurables A_i se coupant les unes avec les autres au plus suivant une portion de leurs frontières, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Désignons cette subdivision par R. Choisissons dans chaque partie A_i un point ξ_i et composons la somme

$$S_R(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)mA_i, \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Les ensembles A_i sont *des parties de A* dans la subdivision R. Désignons par Δ le plus grand diamètre des ensembles A_i (rappelons qu'on appelle diamètre d'un ensemble A_i la borne supérieure des nombres $|x - x'|$, où x, $x' \in A_i$).

Définition. Le nombre S s'appelle *limite des sommes intégrales* $S_R(\xi)$ lorsque $\Delta \to 0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute subdivision R vérifiant la condition $\Delta < \delta$ et tout choix des points ξ_i on a l'inégalité $|S_R(\xi) - S| < \varepsilon$ $\left(\text{notation : } S = \lim\limits_{\Delta \to 0} S_R(\xi)\right)$.

Définition. Une fonction $f(x)$ est dite *Riemann-intégrable* sur un ensemble mesurable A si les sommes intégrales de cette fonction convergent vers une limite lorsque $\Delta \to 0$.

La limite S s'appelle *intégrale multiple de multiplicité m de la fonction* $f(x)$ *suivant l'ensemble A* $\left(\text{notation : } S = \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ou } S = \iint\limits_A \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m\right)$. Indiquons d'autres notations fréquemment utilisables : $\iint\limits_S f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\int\limits_S f(x, y)\,\mathrm{d}S$ pour l'intégrale double ; $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\int\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}V$, $\int\limits_V f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point de coordonnées (x, y, z), pour l'intégrale triple.

Il découle de la définition d'une intégrale multiple que si $f(x) = C$, C est une constante, on a $S = CmA$. En outre, dans le cas où $mA = 0$, on a

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) mA_i = 0$$

pour toute fonction $f(x)$ définie sur un ensemble A même si elle n'est pas bornée sur cet ensemble. Ainsi, pour les intégrales multiples, l'intégrabilité d'une fonction $f(x)$ n'entraîne pas qu'elle soit bornée. Dans la suite, chaque fois qu'on aura affaire à des intégrales multiples on supposera accessoirement que la fonction $f(x)$ est bornée. Indiquons les conditions assurant l'intégrabilité de fonctions.

§ 3. Sommes de Darboux supérieures et inférieures. Conditions d'intégrabilité de fonctions

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un ensemble mesurable A et bornée sur cet ensemble. Soit R une subdivision de l'ensemble A en parties A_i,

$i = 0, 1, \ldots, n-1$, que l'on supposera mesurables. Soient

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in A_i} f(x).$$

Si $|f(x)| \leqslant M$, alors $-M \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M$.

Composons les sommes semblables à des sommes intégrales, en prenant au lieu de la valeur $f(\xi_i)$ les quantités M_i et m_i :

$$\bar{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i mA_i, \quad \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i mA_i.$$

Les sommes $\bar{S}_R$ et $\underline{S}_R$ s'appellent respectivement *sommes de Darboux supérieure* et *inférieure* pour la fonction $f(x)$ correspondant à la subdivision R de l'ensemble A.

Comme $\underline{S}_R \leqslant S_R(\xi) \leqslant \bar{S}_R$, alors, si existent des limites $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{S}_R$ et $\lim\limits_{\Delta \to 0} \bar{S}_R$ égales entre elles, la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A. Montrons que cette condition peut être remplacée par une autre, moins restrictive : $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$. Pour la démonstration, servons-nous des propriétés des sommes de Darboux analogues à celles qu'on observe dans le cas de l'intégrale définie. Notons $R_1 \subset R_2$ le fait que la subdivision R_2 s'obtient de la subdivision R_1 par division des parties de cette dernière. Soit maintenant R_1 et R_2 des subdivisions arbitraires de l'ensemble A, les parties de R_1 étant les ensembles A_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, et les parties de R_2, les ensembles A_j', $j = 0, 1, \ldots, l-1$. En considérant toutes les intersections possibles des ensembles A_i avec les ensembles A_j', on obtient une subdivision plus fine. En effet, chaque point de l'ensemble A appartient à un au moins des ensembles $A_i \cap A_j'$, ceux-ci ne se coupant que suivant au plus une portion de leurs frontières, d'après la propriété analogue des ensembles A_i et A_j'. La subdivision R_3 de l'ensemble A en ensembles $A_i \cap A_j'$ est la *réunion* des subdivisions R_1 et R_2 (notation : $R_1 + R_2$). Il est évident que si $R_3 = R_1 + R_2$, alors $R_1 \subset R_3$ et $R_2 \subset R_3$, car au passage de R_1 à R_3 par exemple, chaque partie se subdivise.

Théorème. *Soient R_1 et R_2 des subdivisions d'un ensemble A et supposons que $R_1 \subset R_2$. Alors $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_2}$, $\bar{S}_{R_1} \geqslant \bar{S}_{R_2}$. Si R_1 et R_2 sont des subdivisions arbitraires de l'ensemble A, alors $\underline{S}_{R_1} \leqslant \bar{S}_{R_2}$.*

☐ Pour prouver la première assertion du théorème il suffit de se borner au cas où la subdivision R_2 s'obtient de R_1 par division d'une partie A_k en ensembles A_k' et A_k''. (En réitérant la procédure de subdivision des ensembles, on retrouve le cas général.) Soient $M_k = \sup\limits_{x \in A_k} f(x)$, $M_k' = \sup\limits_{x \in A_k'} f(x)$, $M_k'' = \sup\limits_{x \in A_k''} f(x)$; les bornes inférieures m_k, m_k' et m_k'' se définissent de

façon analogue. On a $M_k' \leqslant M_k$, $M_k'' \leqslant M_k$, $m_k' \geqslant m_k$, $m_k'' \geqslant m_k$. La somme de Darboux $\overline{S}_{R_2}$ diffère de la somme $\overline{S}_{R_1}$ par le terme $M_k' mA_k' + M_k'' mA_k''$ qui remplace le terme $M_k mA_k$. Or $mA_k = mA_k' + mA_k''$, donc $M_k' mA_k' + M_k'' mA_k'' \leqslant M_k mA_k' + M_k mA_k'' = M_k mA_k$, d'où $\overline{S}_{R_1} \geqslant \overline{S}_{R_2}$. On prouve par des raisonnements analogues que $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_2}$.

Pour démontrer la seconde assertion du théorème, considérons la subdivision $R_3 = R_1 + R_2$. Comme $R_1 \subset R_3$ et $R_2 \subset R_3$, on aboutit aux inégalités suivantes : $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_3} \leqslant \overline{S}_{R_3} \leqslant \overline{S}_{R_2}$, ou, en ne gardant que les termes extrêmes, $\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_{R_2}$. ■

Ainsi donc, les sommes de Darboux supérieures sont minorées et les sommes inférieures, majorées. Il existe donc $\inf\limits_R \overline{S}_R = \overline{S}$ et $\sup\limits_R \underline{S}_R = \underline{S}$. Les quantités $\overline{S}$ et $\underline{S}$ s'appellent respectivement *intégrales de Darboux supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$ étendues à l'ensemble A*. Pour des subdivisions R_1 et R_2 quelconques, l'inégalité $\overline{S}_{R_2} \geqslant \underline{S}_{R_1}$ entraîne $\overline{S}_{R_2} \geqslant \overline{S} \geqslant \underline{S} \geqslant \underline{S}_{R_1}$.

Indiquons les conditions d'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur un ensemble mesurable A.

Théorème. *Pour qu'une fonction $f(x)$ bornée sur un ensemble mesurable A y soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $0 \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$ si $\Delta < \delta$ quelle que soit la subdivision R de l'ensemble A* $\left(\Delta_i = \sup\limits_{x,\, x' \in A_i} |x - x'|,\ \Delta = \max\limits_i \Delta_i\right)$.

Notation abrégée de la condition : $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

□ *Nécessité.* Supposons que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A et $\int\limits_A f(x)\, dx = S$. Ceci signifie que pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ tel que $|S_R(\xi) - S| < \varepsilon_1$ si $\Delta < \delta$ indépendamment du choix des points ξ_i. Alors, choisissant de deux façons les points ξ_i, $\xi_i = \xi_i'$ et $\xi_i = \xi_i''$, on obtient

$$|S_R(\xi') - S_R(\xi'')| = |[S_R(\xi') - S] + [S - S_R(\xi'')]| \leqslant$$
$$\leqslant |S_R(\xi') - S| + |S_R(\xi'') - S| < 2\varepsilon_1.$$

Comme $M_i = \sup\limits_{x \in A_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in A_i} f(x)$, il doit exister sur l'ensemble A_i des points ξ_i' et ξ_i'' tels que $M_i - \varepsilon_1 \leqslant f(\xi_i') \leqslant M_i$, $m_i \leqslant f(\xi_i'') \leqslant m_i + \varepsilon_1$. Avec un tel choix des points ξ_i' et ξ_i'' on a

$$\overline{S}_R - S_R(\xi') = \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\xi_i')] mA_i \leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon_1 mA,$$

$$S_R(\xi'') - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i'') - m_i]mA_i \leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon_1 mA.$$

Donc, si $\Delta < \delta$, alors

$$\bar{S}_R - \underline{S}_R = [\bar{S}_R - S_R(\xi')] + [S_R(\xi'') - \underline{S}_R] + \\ + [S_R(\xi') - S_R(\xi'')] < 2\varepsilon_1[mA + 1].$$

Si $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire et ε_1 est choisi à partir de la condition $2\varepsilon_1[mA + 1] = \varepsilon$, alors pour $\Delta < \delta = \delta(\varepsilon)$ on a l'inégalité $\bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

Suffisance. Soit $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$. Comme $\underline{S}_R \leqslant \underline{S} \leqslant \bar{S} \leqslant \bar{S}_R$, on a $\bar{S} - \underline{S} \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R$, c'est-à-dire que $\bar{S} = \underline{S} = S$ (S est la notation commune à $\underline{S}$ et $\bar{S}$). Montrons que le nombre S est la limite des sommes intégrales lorsque Δ tend vers 0. En vertu de la relation $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$ si $\Delta < \delta$. Or, $\underline{S}_R \leqslant \leqslant S_R(\xi) \leqslant \bar{S}_R$ et $\underline{S}_R \leqslant S \leqslant \bar{S}_R$. D'où $|S_R(\xi) - S| \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$ si $\Delta < \delta$. ■

On peut écrire la condition du théorème sous la forme

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i = 0,$$

où la quantité $\omega_i = M_i - m_i = \sup\limits_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')|$ s'appelle *oscillation de la fonction* $f(x)$ sur l'ensemble A_i.

Corollaires. 1. *Soient A et B deux ensembles mesurables et $B \subset A$. Si une fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A, elle l'est sur B.*

2. *Si une fonction $f(x)$ est intégrable sur un ensemble mesurable A, alors la fonction $|f(x)|$ est également intégrable sur cet ensemble.*

□ **1.** On a $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$. Soit R' une subdivision quelconque de l'ensemble B, le diamètre maximal des parties étant Δ. Complétons la subdivision R' de B pour former une subdivision R de A en ajoutant de nouveaux ensembles mesurables de diamètre moindre que Δ. Comme $\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R$, alors $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}) = 0$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble B.

2. Il s'ensuit de l'inégalité $||f(x)| - |f(x')|| \leqslant |f(x) - f(x')|$ que

$$\bar{\omega}_i = \sup_{x, x' \in A_i} ||f(x)| - |f(x')|| \leqslant \sup_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')| = \omega_i,$$

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i mA_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i,$$

où $\bar{\omega}_i$ est l'oscillation de la fonction $|f(x)|$ sur l'ensemble A_i. Donc la condition $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i = 0$ entraîne que $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i mA_i = 0$. Par conséquent, la fonction $|f(x)|$ est intégrable sur l'ensemble A. ■

Nous avons là la condition générale d'intégrabilité des fonctions. Voyons quelles sont les classes de fonctions vérifiant cette condition.

Théorème. *Une fonction $f(x)$ continue sur un ensemble mesurable fermé A_i est intégrable sur cet ensemble.*

□ L'ensemble A est borné car mesurable. En outre, il est fermé par hypothèse. La fonction $f(x)$ est donc uniformément continue sur l'ensemble A, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta, x \in A, x' \in A$.

Soit R une subdivision arbitraire de l'ensemble A en parties dont le diamètre maximum Δ soit inférieur à δ. Alors, en vertu de l'inégalité $|x - x'| < \delta$ sur A_i on a $\omega_i = \sup\limits_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$. Ainsi donc

$$\bar{S}_R - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i \leqslant \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon_1 mA = \varepsilon,$$

i.e. $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$, ce qui prouve que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A. ■

On peut alléger quelque peu les conditions du théorème précédent.

Théorème. *Une fonction $f(x)$ bornée sur un ensemble mesurable fermé A et continue sur cet ensemble à l'exception des points constituant l'ensemble B de mesure nulle, est intégrable sur A.*

□ Soit un réseau de cubes d'arête $h = 1/2^N : k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Comme $mB = 0$ par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, on trouvera un N tel que $m\bar{B}_N < \varepsilon$. Considérons à la place de chaque cube $k_i h \leqslant x_i \leqslant (k_i + 1)h$, $i = 1, 2, \ldots, m$, faisant partie de la figure élémentaire $\bar{B}_N$, le cube ouvert d'arête $(2l + 1)h : (k_i - l)h < x_i < (k_i + 1 + l)h$. Soit C_l la réunion de tels cubes. Il est évident que $mC_l \leqslant (2l + 1)^m \varepsilon$. Considérons une subdivision arbitraire R de l'ensemble A en parties A_i, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, de diamètre maximum $\Delta < h$. Répartissons les ensembles A_i en deux groupes, rapportant à l'un d'eux les ensembles contenus dans C_2 et au second, tous les autres ensem-

bles. Les ensembles A_i du second groupe n'ont pas de points communs avec l'ensemble C_1, étant donné que la distance d'un point extérieur à C_2 à un point quelconque de C_1 est $\geqslant h$.

Remarquons que l'ensemble $A \setminus C_1$, c'est-à-dire l'ensemble des points de A n'appartenant pas à C_1, est fermé en vertu de la propriété qui veut que les points d'un ensemble fermé qui n'appartiennent pas à un ensemble ouvert constituent un ensemble fermé.

Majorons l'oscillation de la fonction $f(x)$ sur chacun des ensembles A_i. La fonction $f(x)$ étant continue sur l'ensemble borné fermé $(A \setminus C_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta$, et $x, x' \in (A \setminus C_1)$. Soit $\Delta < \delta$, alors on a $\omega_i = \sup\limits_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$ pour les ensembles du second groupe. Quant aux ensembles du premier groupe, on a en vertu de l'inégalité $|f(x)| \leqslant M$:

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x)| + |f(x')| \leqslant 2M,$$

c'est-à-dire que $\omega_i \leqslant 2M$. Donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i = \sum_i{}' \omega_i mA_i + \sum_i{}'' \omega_i mA_i \leqslant$$
$$\leqslant 2M \sum_i{}' mA_i + \varepsilon \sum_i{}'' mA_i.$$

La sommation est étendue aux ensembles du premier groupe dans la première somme et aux ensembles du second groupe dans la seconde. Comme $\sum_i{}' mA_i \leqslant mC_2 \leqslant 5^m\varepsilon$, et $\sum_i{}'' mA_i \leqslant mA$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i \leqslant 2M\cdot 5^m\varepsilon + \varepsilon mA = \varepsilon(2M\cdot 5^m + mA)$$

si $\Delta < \min(\delta, h)$. Le nombre ε étant arbitrairement petit, on a $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i mA_i = 0$, et donc la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A. ■

§ 4. Propriétés fondamentales de l'intégrale multiple

Nous allons supposer que les ensembles figurant dans l'énoncé des propriétés fondamentales de l'intégrale multiple sont mesurables et les fonctions, intégrables.

1° *On a l'égalité*

$$\int_A [c_1\cdot f_1(x) + c_2\cdot f_2(x)]\mathrm{d}x = c_1 \int_A f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int_A f_2(x)\mathrm{d}x.$$

2° *Si un ensemble A est partagé en deux, B et C, se coupant suivant au plus une partie de leurs frontières, on a*

$$\int_A f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx + \int_C f(x)\,dx.$$

3° *Si l'on a* $f(x) \geqslant g(x)$ *sur* A, *alors*

$$\int_A f(x)\,dx \geqslant \int_A g(x)\,dx.$$

4° *On a l'inégalité*

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A |f(x)|\,dx.$$

5° *Soit* $M = \sup_{x\in A} f(x)$, $m = \inf_{x\in A} f(x)$ *et* $g(x) \geqslant 0$ *sur* A. *On a alors*

$$\int_A f(x)g(x)\,dx = \mu \int_A g(x)\,dx, \quad où \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Cette formule s'appelle *formule de la moyenne de l'intégrale multiple.* En particulier, on a pour $g(x) = 1$

$$\int_A f(x)\,dx = \mu\cdot mA, \quad \text{où} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

□ 1° Cette propriété découle immédiatement de la propriété analogue des sommes intégrales.

2° Soient R_1 et R_2 des subdivisions arbitraires des ensembles B et C respectivement. La réunion des R_1 et R_2 est la subdivision R de A. Donc $S_R(\xi) = S_{R_1}(\xi) + S_{R_2}(\xi)$. Soient Δ_1 et Δ_2 les diamètres maximums des parties de B et de C dans les subdivisions R_1 et R_2 ; posons $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$. Passant à la limite pour $\Delta \to 0$, on trouve

$$\int_A f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx + \int_C f(x)\,dx.$$

3° Soit $h(x) = f(x) - g(x)$. Alors quelle que soit la subdivision R de l'ensemble A, on a $h(x) \geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)mA_i \geqslant 0$. En faisant tendre Δ vers zéro, on trouve $\int_A h(x)\,dx \geqslant 0$, d'où $\int_A f(x)\,dx \geqslant \int_A g(x)\,dx$.

4° On a $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$; donc

$$-\int_A |f(x)|\,dx \leqslant \int_A f(x)\,dx \leqslant \int_A |f(x)|\,dx,$$

i.e.

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A |f(x)|\,dx.$$

5° Comme $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, alors

$$m\int_A g(x)\,dx \leqslant \int_A f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_A g(x)\,dx.$$

Supposons que $\int_A g(x)\,dx > 0$. Posant alors $\mu = \int_A f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_A g(x)dx$, on trouve $m \leqslant \mu \leqslant M$. Ainsi donc

$$\int_A f(x)g(x)\,dx = \mu\int_A g(x)\,dx, \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Cette relation reste en vigueur également lorsque $\int_A g(x)\,dx = 0$, car dans ce cas $\int_A f(x)g(x)\,dx = 0$. ■

§ 5. Réduction des intégrales multiples à des intégrales itérées

Sous des hypothèses assez générales, les intégrales multiples se laissent réduire à des intégrales de multiplicité moindre. Commençons par le cas où l'ensemble d'intégration A est un parallélépipède m-dimensionnel $a_i \leqslant \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Théorème. *Supposons que la fonction $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, est définie dans un parallélépipède m-dimensionnel $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ et existe l'intégrale $\int_A f(x)\,dx$ de multiplicité m. Alors*

1) *si pour chaque $x_1 \in [a_1, b_1]$ fixe, existe une intégrale*

$$I(x_1) = \int_B f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_2 dx_3 \ldots dx_m$$

de multiplicité $m - 1$, où B est un parallélépipède $(m - 1)$-dimensionnel $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i = 2, 3, \ldots, m$, alors existe également l'intégrale itérée ou répétée $\int_{a_1}^{b_1} I(x_1)\,dx_1$, et

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} I(x_1)dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_B f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_2, \ldots, dx_m\ ;$$

2) *si pour des valeurs fixes* $(x_2, \ldots, x_m)$ *existe l'intégrale*

$$J(x_2, \ldots, x_m) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1,$$

alors existe également l'intégrale itérée

$$\int_B J(x_2, \ldots, x_m)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m,$$

et

$$\int_A f(x)\, dx = \int_B J(x_2, \ldots, x_m)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m =$$

$$= \int_B dx_2\, dx_3 \ldots dx_m \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1.$$

□ 1. Divisons le parallélépipède B en N parallélépipèdes B_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, et l'intervalle $[a_1, b_1]$ en M intervalles C_l, $l = 0, 1, \ldots, M-1$. On a alors la subdivision R du parallélépipède A en NM parallélépipèdes A_{lk} tels que $x_1 \in C_l$, $(x_2, \ldots, x_m) \in B_k$. Il est évident que $mA_{lk} = mB_k h_l$ (h_l est la longueur de l'intervalle C_l). Soit $m_{lk} = \inf\limits_{x \in A_{lk}} f(x)$, $M_{lk} = \sup\limits_{x \in A_{lk}} f(x)$. Si $\xi_{1l} \in C_l$, on a d'après la formule de la valeur moyenne des intégrales multiples

$$m_{lk}\, mB_k \leqslant \int_{B_k} f(\xi_{1l}, x_2, \ldots, x_m)\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant M_{lk}\, mB_k.$$

Multipliant chaque inégalité par h_l et en ajoutant les produits, on trouve

$$\sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} m_{lk}\, mA_{lk} \leqslant \sum_{l=0}^{M-1} I(\xi_{1l}) h_l \leqslant \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} M_{lk}\, mA_{lk},$$

i.e.

$$\underline{S}_R \leqslant \sum_{l=0}^{N-1} I(\xi_{1l}) h_l \leqslant \bar{S}_R.$$

L'intégrale $\int_A f(x)\, dx$ étant justiciable d'estimations analogues : $\underline{S}_R \leqslant \int_A f(x)\, dx \leqslant \bar{S}_R$, on a

$$\left| \sum_{l=0}^{M-1} I(\xi_{1l}) h_l - \int_A f(x)\, dx \right| \leqslant \bar{S}_R - \underline{S}_R.$$

Etant donné que la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'ensemble A, on a $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ (Δ est le diamètre maximum des ensembles A_{lk}). Comme $h_l \to 0$ lorsque $\Delta \to 0$, il s'ensuit de l'inégalité obtenue que la limite des sommes intégrales de la fonction $I(x_1)$ sur l'intervalle $[a_1, b_1]$ existe et de plus, on a $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_1}^{b_1} I(x_1)\,\mathrm{d}x_1$.

2. La seconde assertion du théorème se démontre de façon analogue à l'aide des inégalités suivantes

$$m_{lk} h_l \leqslant \int\limits_{C_l} f(x_1, \xi_{2k}, \xi_{3k}, \ldots, \xi_{mk})\,\mathrm{d}x_1 \leqslant M_{lk} h_l,$$

$$(\xi_{2k}, \xi_{3k}, \ldots, \xi_{mk}) \in B_k,$$

$$\sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} m_{lk}\, mA_{lk} \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} J(\xi_{2k}, \xi_{3k}, \ldots, \xi_{mk})\, mB_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} M_{lk}\, mA_{lk}. \blacksquare$$

Généralisons ce théorème au cas où A est un ensemble mesurable quelconque et $f(x)$, une fonction intégrable sur cet ensemble. Renfermons l'ensemble A dans un parallélépipède $\overline{A}$ m-dimensionnel et définissons la fonction $f(x)$ dans ce parallélépipède en posant $f(x) = 0$ pour $x \overline{\in} A$. Il est évident que $\int\limits_{\overline{A}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_A f(x)\mathrm{d}x$. L'intégrale $I(x_1) = \int\limits_{\overline{B}} f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m$ se ramène à l'intégrale $\int\limits_{B(x_1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m$, où $B(x_1)$ est l'ensemble de tous les points $(x_2, \ldots, x_m)$ vérifiant pour x_1 fixe la condition $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$. On obtient en définitive

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{B(x_1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m.$$

De même

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_B \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_m \int\limits_{C(x_2, \ldots, x_m)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_1.$$

Ici $C(x_2, \ldots, x_m)$ est l'ensemble des points x_1 qui, pour des valeurs fixes de $x_2, \ldots, x_m$, vérifient la condition $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$. En pratique, on décompose l'ensemble A en parties dans chacune desquelles l'ensemble

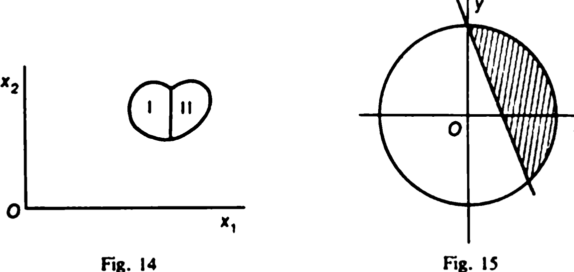


Fig. 14 Fig. 15

$C(x_2, \dots, x_m)$ est un intervalle $[\varphi_1(x_2, \dots, x_m), \varphi_2(x_2, \dots, x_m)]$. Le procédé de partition de A dans le cas de l'intégrale double est montré sur la fig. 14. Dans ce cas il est commode de diviser l'ensemble A en deux ensembles dans chacun desquels la droite parallèle à l'axe Ox_1 coupe la frontière de l'ensemble seulement en deux points.

Les variables $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ont été réparties en deux groupes comme suit : x_1 et $(x_2, \dots, x_m)$. On peut les répartir en deux groupes d'une façon différente et obtenir des formules analogues. Si une intégrale multiple se laisse réduire à des intégrales itérées par deux façons, les intégrales itérées en question sont identiques.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale $\int\limits_S xy \, dx \, dy$, où S est l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 \leqslant 1$ délimité par la droite $2x + y = 1$ (fig. 15).

La droite $2x + y = 1$ coupe le cercle $x^2 + y^2 = 1$ aux points $x = 0$, $y = 1$ et $x = 4/5$, $y = -3/5$. La variable y varie entre $y = -3/5$ et $y = 1$, et la variable x, pour y fixe, varie entre $x = (1 - y)/2$ et $x = \sqrt{1 - y^2}$. Donc

$$\int\limits_S xy \, dx \, dy = \int\limits_{-3/5}^{1} y \, dy \int\limits_{(1-y)/2}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx =$$

$$= \int\limits_{-3/5}^{1} y \cdot \frac{1}{2} \left[1 - y^2 - \left(\frac{1 - y}{2}\right)^2\right] dy = \frac{32}{125}.$$

Exercices. **1.** Calculer l'intégrale $\int\limits_\Omega xy^2 \, dx \, dy$ sur le domaine Ω délimité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p/2$ $(p > 0)$.

2. Calculer le volume d'un corps délimité par les surfaces $z = 1 + x + y$; $z = 0$; $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$.

§ 6. Changement de variables dans une intégrale multiple

Théorème. *Soient donnés deux ensembles mesurables : A dans l'espace des variables* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *et B dans l'espace des variables* $t = (t_1, \ldots, t_m)$ *; entre ces ensembles est établie une bijection à l'aide des formules*

$$x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_m),\ x_2 = x_2(t_1, \ldots, t_m),\ \ldots,\ x_m = x_m(t_1, \ldots, t_m).$$

Si alors les fonctions $x_i(t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, \ldots, m$, *admettent sur l'ensemble B des dérivées partielles du premier ordre continues, le jacobien* $I = \dfrac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(t_1, \ldots, t_m)} = \operatorname{Det}\left\| \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j} \right\|$ *est non nul sur B et la fonction* $f(x)$ *est intégrable sur A, on a*

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m =$$

$$= \int_B f[x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_m)]\cdot |I|\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m.$$

□ La démonstration sera effectuée par récurrence. On supposera pour simplifier que chaque fois qu'il le sera nécessaire, l'intégrale multiple se réduit à des intégrales itérées ; si en outre, on aura affaire à une intégrale simple, l'intégration sera étendue à plusieurs intervalles.

Quelles que soient les variables $t_1, \ldots, t_m$, l'une au moins des dérivées $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ est distincte de zéro en tout point fixe $t = t_0$ (sinon $I(t_0) = 0$). La fonction $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ garde son signe dans un voisinage du point t_0 par continuité. Ceci nous autorise à diviser l'ensemble B en parties dans chacune desquelles l'une des dérivées $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_k}$ ne change pas de signe. Nous allons montrer la formule de changement de variables pour toutes ces parties de l'ensemble B. Quitte à renuméroter les variables $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(t_1, \ldots, t_m)$, on peut faire que dans le domaine considéré l'on ait $\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} \neq 0$.

Soient $m = 1$, A l'intervalle $[a, b]$, B l'intervalle $[c, d]$ et la fonction $x = x(t)$ établissant une bijection entre les points de A et B. On a alors $I = x'(t)$ avec $x'(t) \neq 0$. Si $x'(t) > 0$, alors $x(t)$ est une fonction strictement croissante et $x(c) = a$, $x(d) = b$. Si $x'(t) < 0$, alors $x(t)$ est une fonction strictement décroissante et $x(c) = b$, $x(d) = a$. La formule de changement de variables dans une intégrale définie nous donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_c^d f[x(t)]x'(t)\,dt \text{ pour } x'(t) > 0, \\ \displaystyle -\int_c^d f[x(t)]x'(t)\,dt \text{ pour } x'(t) < 0. \end{cases}$$

Dans les deux cas $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[x(t)]|x'(t)|\,dt$ et la formule de changement de variables est démontrée pour $m = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour l'intégrale de multiplicité $m - 1$, prouvons-la pour l'intégrale de multiplicité m. Réduisons l'intégrale multiple à l'intégrale itérée

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{A(x_1)} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_2 \ldots dx_m.$$

Ici $A(x_1)$ est l'ensemble des valeurs $(x_2, \ldots, x_m)$ vérifiant pour x_1 fixe la condition $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$. De l'équation $x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_m)$ on tire t_1 comme fonction implicite des autres variables : $t_1 = t_1(x_1, t_2, \ldots, t_m)$ $\left(\text{cette procédure est licite puisque, rappelons-le, } \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \neq 0\right)$. Portant alors la valeur obtenue de t_1 dans $x_i(t_1, \ldots, t_m)$ pour $i \geqslant 2$, on trouve $x_2(t_1, \ldots, t_m) = \bar{x}_2(x_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_m) = \bar{x}_m(x_1, t_2, \ldots, t_m)$. Pour x_1 fixe, transformons à l'aide de la formule de changement de variables l'intégrale de multiplicité $m - 1$:

$$\int_{A(x_1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_2 \ldots dx_m = \\ = \int_{B(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)|I^*|\,dt_2 \ldots dt_m,$$

où $I^* = D(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)/D(t_2, \ldots, t_m)$. Sous la condition $I^* \neq 0$ on en tire

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{B(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)|I^*|\,dt_2 \ldots dt_m.$$

Changeons l'ordre d'intégration dans l'intégrale itérée :

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{B(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)|I^*|\,dt_2 \ldots dt_m = \\ = \int_C dt_2 \ldots dt_m \int_{L(t_2, \ldots, t_m)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)|I^*|\,dx_1.$$

Ici $L(t_2, \ldots, t_m)$ est l'ensemble des valeurs x_1 telles que le point $(x_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_m)$ appartient à l'ensemble $x_1 \in]a_1, b_1[$, $(t_2, \ldots, t_m) \in \bar{B}(x_1)$ pour des valeurs $(t_2, \ldots, t_m) \in C$ fixes. La formule de changement de variables de l'intégrale simple nous donne

$$\int\limits_{L(t_2, \ldots, t_m)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) |I^*| \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int\limits_{B(t_2, \ldots, t_m)} f[x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_m)] |I^*| \left|\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| \mathrm{d}t_1.$$

Nous nous sommes servi du fait que par le changement de x_1 en $x_1(t_1,$ $t_2, \ldots, t_m)$ les fonctions $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ se transforment en les fonctions $x_2(t_1,$ $t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ et l'ensemble $L(t_2, \ldots, t_m)$ en l'ensemble $B(t_2, \ldots, t_m)$, ensemble des valeurs de la variable t_1 pour $t_2, \ldots, t_m$ fixes. Comme

$$\int\limits_C \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_m \int\limits_{B(t_2, \ldots, t_m)} f[(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_m)] |I^*| \left|\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| \mathrm{d}t_1 =$$

$$= \int\limits_B f[x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_m(t_1, \ldots, t_m)] \left| I^* \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m,$$

il reste à montrer que $I = I^* \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}$. Rappelons que les fonctions $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ sont obtenues par substitution de la fonction $t_1 = \bar{t}_1(x_1, t_2, \ldots, t_m)$ dans les fonctions $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Donc $x_1 = x_1(\bar{t}_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\bar{x}_2 = x_2(\bar{t}_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_m), \ldots, \bar{x}_m = x_m(\bar{t}_1, t_2, \ldots, t_m)$, d'où

$$0 = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial t_j} + \frac{\partial x_1}{\partial t_j},$$

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t_j} = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial t_j} + \frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

$$i \geqslant 2,\ j \geqslant 2.$$

Servons-nous de ces relations pour transformer l'expression de I :

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_m}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

Pour tous les $j \geqslant 2$, multiplions la première colonne par $\dfrac{\partial \bar{t}_1}{\partial t_j}$ et ajoutons-la à la colonne de numéro j. Il vient

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \bar{x}_m}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial \bar{x}_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1} I^*,$$

ce que nous voulions. Remarquons qu'il s'ensuit de l'égalité obtenue que la condition $I^* \neq 0$ est remplie, puisque $I \neq 0$, $\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} \neq 0$. ■

Exemples. **1.** Soit $S = \int\limits_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Passons aux coordonnées polaires : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. On a alors

$$I = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

i.e. $\int\limits_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int\limits_B f[r \cos \varphi, r \sin \varphi] r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$.

2. Soit $S = \int\limits_A f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$. Passons aux coordonnées sphériques : $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Précisons la signification géométrique de la quantité r et des angles θ et φ. Vu que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, r est la distance du point aux coordonnées (x, y, z) à l'origine des coordonnées (la longueur du rayon vecteur **r**) ; θ est l'angle que fait le rayon vecteur **r** avec l'axe Oz ; φ est l'angle entre le plan passant par l'axe Oz et le rayon vecteur **r** et le plan xOz (fig. 16). Un point

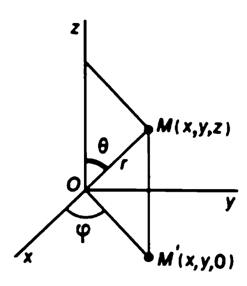


Fig. 16

dans l'espace est défini sans ambiguïté par les quantités r, θ, φ à condition que celles-ci varient dans les limites : $0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Dans ce cas

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Donc

$$\int_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_B f[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta]r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Dans les exemples considérés, il se peut qu'en certains points on a $I = 0$. Ce fait n'est pas essentiel, car au lieu de l'intégration suivant l'ensemble A on peut intégrer suivant un ensemble A_ε obtenu de l'ensemble A en lui enlevant les ε-voisinages des points en lesquels $I = 0$. En faisant tendre ε vers zéro, on obtient à la limite les résultats obtenus plus haut (par des raisonnements analogues à ceux conduits pour les intégrales impropres).

Exercice. Calculer l'intégrale $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, où le domaine V est délimité par les surfaces $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 1$.

Indication. Utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z), où $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$.

CHAPITRE 10

INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Une courbe dans un espace m-dimensionnel

L'ensemble de points $(x_1, \ldots, x_m)$ dans un espace m-dimensionnel vérifiant les égalités $x_i = x_i(t)$, où $i = 1, 2, \ldots, m$ et $x_i(t)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, s'appelle *courbe continue* et la variable t, son *paramètre* (notation abrégée : $x = x(t)$).

Dans l'espace tridimensionnel usuel, des fonctions continues $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sont susceptibles de définir des ensembles de points qui ne correspondent pas en général à nos notions intuitives de courbe dans l'espace. Si, par exemple, $x_i(t) = \text{const}$, les équations $x_i = x_i(t)$ définissent un seul et même point ; une courbe définie par des équations $x_i = x_i(t)$ peut remplir un certain volume, certaines portions de la courbe peuvent se confondre pour des valeurs différentes du paramètre t, etc. Si nous voulons que l'ensemble des points défini par l'équation $x = x(t)$ corresponde à nos notions intuitives de courbe, nous devons exiger qu'à des valeurs différentes du paramètre t correspondent des points différents, c'est-à-dire que pour $t_2 \neq t_1$ on ait $|x(t_2) - x(t_1)| \neq 0$. Cette condition exclut la possibilité de self-intersection de la courbe. On peut admettre pourtant que cette condition est violée en un nombre fini de points. La courbe peut avoir alors un nombre fini de points de self-intersection (fig. 17).

Voyons quelques caractéristiques géométriques d'une courbe. Pour $m = 2$ et $m = 3$ le vecteur $(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, où $\Delta x_i = \bar{x}_i - x_i$, est dirigé suivant la droite reliant les points $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots$ $\ldots, \bar{x}_m)$. Il est donc naturel d'appeler vecteur dirigé suivant une tangente à

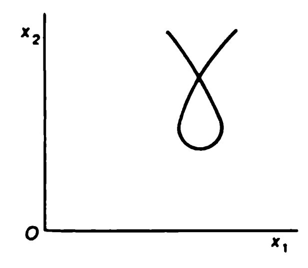


Fig. 17

la courbe $x = x(t)$ la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t).$$

Introduisons la notion de longueur d'un segment d'une courbe.

Définition. Soient $x = x(t)$ une courbe admettant un nombre fini de self-intersections, $x_i = x_i(t)$ des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et R une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en parties de longueur non supérieure à Δ. Si alors existe la limite

$$l = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|, \quad t_0 = a,\ t_n = b,$$

indépendante du mode de subdivision, elle s'appelle *longueur de la portion* $a \leqslant t \leqslant b$ *de la courbe*, et la courbe est dite *rectifiable.*

Remarquons que dans l'espace tridimensionnel la somme $\sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|$ donne la longueur d'une ligne polygonale de sommets aux points $x(t_j)$.

Indiquons les conditions de rectifiabilité des courbes.

Théorème. *Une courbe* $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $t \in [a, b]$, $a < b$, *est rectifiable si les fonctions* $x_i'(t)$ *sont intégrables sur l'intervalle* $[a, b]$, $i = 1, \ldots, m$, *la longueur de la courbe étant*

$$l = \int_a^b |x'(t)| \mathrm{d}t.$$

□ Soit R une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, $t_0 = a$, $t_n = b$. Majorons la différence entre la quantité $\bar{l}_R = \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|$ et la somme partielle $l_R(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} |x'(\xi_j)| \Delta t_j$ pour l'intégrale

$$l = \int_b^a |x'(t)| \mathrm{d}t, \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}],\ \Delta t_j = t_{j+1} - t_j.$$

On a

$$|\bar{l}_R - l_R(\xi)| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} [|x(t_{j+1}) - x(t_j)| - |x'(\xi_j)| \Delta t_j] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \big| |x(t_{j+1}) - x(t_j)| - |x'(\xi_j)|\Delta t_j \big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j) - x'(\xi_j)\Delta t_j|.$$

D'autre part,

$$|x(t_{j+1}) - x(t_j) - x'(\xi_j)\Delta t_j| = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} [x'(t) - x'(\xi_j)]\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_j}^{t_{j+1}} |x'(t) - x'(\xi_j)|\mathrm{d}t.$$

Majorons l'expression sous le signe d'intégration :

$$|x'(t) - x'(\xi_j)|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i'(t) - x_i'(\xi_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i'(t) - x_i'(\xi_j)| \right]^2 \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_{ij} \right]^2,$$

où $\omega_{ij} = \sup_{t,\, \xi_j \in [t_j,\, t_{j+1}]} |x_i'(t) - x_i'(\xi_j)|$ est l'oscillation de la fonction $x_i'(t)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Donc

$$|\tilde{l}_R - l_R(\xi)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_{ij}\Delta t_j \right).$$

Les fonctions $x_i'(t)$ étant intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, la limite $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{ij}\Delta t_j = 0$ indépendamment de la subdivision R de l'intervalle $[a, b]$ ($\Delta = \max \Delta t_j$), d'où $\lim_{\Delta \to 0} |\tilde{l}_R - l_R(\xi)| = 0$. Or, $\lim_{\Delta \to 0} l_R(\xi) = \int_a^b |x'(t)|\mathrm{d}t$. Donc pour $\Delta \to 0$ la limite de la somme $\tilde{l}_R = \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|$ existe et est égale à $\int_a^b |x'(t)|\mathrm{d}t$. ■

En particulier, est rectifiable une courbe *différentiable par morceaux*, c'est-à-dire une courbe $x = x(t)$ dont les fonctions $x_i(t)$ sont différentia-

bles par morceaux (rappelons qu'on appelle différentiable par morceaux une fonction continue admettant une dérivée continue par morceaux).

Pour la courbe, on a pris comme paramètre la variable t. Il est évident que pour $a \leqslant t \leqslant b$ on obtiendra le même ensemble de points si au lieu du paramètre t on considère tout autre paramètre, par exemple τ, lié au paramètre t par une relation $t = f(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, et si la variable t parcourt l'intervalle $[a, b]$ pour $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Afin d'éviter le double parcours de la courbe il est naturel d'exiger que la fonction $f(\tau)$ soit strictement monotone. En particulier, il suffit de demander que $f'(\tau) \neq 0$ pour $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. La non-nullité de $f'(\tau)$ donne lieu à deux classes de paramètres : ceux pour lesquels $f'(\tau) > 0$ et ceux pour lesquels $f'(\tau) < 0$. Dans le premier cas les points de la courbe $x = x[f(\tau)]$ sont parcourus pour des τ croissants dans le même sens que pour la courbe $x = x(t)$, dans le second cas ils sont parcourus dans le sens inverse. Il apparaît tout naturellement la notion de courbe *orientée* : la courbe Γ sera désignée par Γ_+ si sont utilisés les paramètres de la première classe, et par Γ_- si les paramètres sont pris dans la seconde classe. On associe à la courbe orientée Γ_+ le sens de parcours positif de la courbe Γ (avec l'accroissement du paramètre), et à la courbe Γ_- le sens de parcours négatif.

Introduisons le paramètre naturel s très commode pour de nombreuses applications : $s = s(t)$ est la longueur de l'arc de courbe entre les points $t = a$ et le point donné t. Pour des courbes $x = x(t)$ rectifiables on a

$$s(t) = \int_a^t |x'(\tau)| d\tau.$$

Pour que ce paramètre soit admissible, on admettra que $|x'(t)| \neq 0$ pour $t \in [a, b]$. Il est évident que les paramètres s et t déterminent une même orientation de la courbe Γ. On peut introduire le paramètre naturel d'une autre façon afin d'obtenir la courbe Γ_- :

$$s(t) = \int_t^b |x'(\tau)| d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant l.$$

Le paramètre naturel facilite la recherche du vecteur tangent de longueur unité. Si $x = \psi(s)$, la tangente à la courbe est dirigée suivant le vecteur $x' = \psi'(s) = (\psi_1'(s), \ldots, \psi_m'(s))$. Montrons que ce vecteur est de longueur unité. On a $x = x(t) = \psi(s(t))$, donc $|x'(t)| = \left|\psi'(s)\dfrac{ds}{dt}\right|$. D'autre part, $\left|\dfrac{ds}{dt}\right| = |x'(t)|$, d'où $|\psi'(s)| = 1$, ce que nous voulions. On peut montrer que le vecteur $x'(s)$ est de sens inverses pour les courbes Γ_+ et Γ_-.

Exemples. **1.** Soit à déterminer l'angle que fait la tangente à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ au point (1, 1, 1) avec le plan $z = 0$. Le vecteur unité de la tangente est

$$\mathbf{1} = \left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \right).$$

Pour $t = 1$ on a $x = y = z = 1$ et $\mathbf{1} = (1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$. La projetée de la tangente sur le plan $z = 0$ est le vecteur $\mathbf{1}_z = (1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 0)$ et l'angle φ entre la tangente et le plan $z = 0$ est égal à l'angle entre les vecteurs $\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}_z$. Donc $\cos \varphi = |l_z| = \sqrt{5/14}$, d'où $\varphi = \text{Arc} \cos \sqrt{5/14}$.

2. Soit à calculer la longueur de la ligne funiculaire $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. On a

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exercice. Calculer la longueur d'arc de la courbe $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

§ 2. Intégrales curvilignes

Définition 1. Soit s le paramètre naturel d'une courbe Γ, $0 \leqslant s \leqslant l$. L'intégrale $I = \int_0^l f[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s)] ds$ s'appelle *intégrale curviligne de première espèce de la fonction* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *le long de la courbe* Γ (notation : $I = \int_\Gamma f(x_1, \ldots, x_m) ds$ ou $I = \int_\Gamma f(x)\, ds$, où $x = (x_1, \ldots, x_m)$).

Si au lieu du paramètre naturel s on prend un autre paramètre, t par exemple, $t \in [a, b]$, on a

$$I = \int_a^b f[x_1(t), \ldots, x_m(t)]|x'(t)|\mathrm{d}t.$$

L'intégrale I est indépendante de l'orientation de la courbe par le paramètre t (vérifier à titre d'exercice).

Définition 2. Soit $F(x) = F(x_1, \ldots, x_m) = (F_1, \ldots, F_m)$ une fonction vectorielle m-dimensionnelle, les fonctions $F_i = F_i(x_1, \ldots, x_m)$ étant continues aux points de la courbe Γ. On appelle *intégrale curviligne de la fonction vectorielle* $F(x) = F(x_1, \ldots, x_m)$ *le long de la courbe* Γ (*intégrale curviligne de deuxième espèce*) l'intégrale

$$I = \int_0^l F[x(s)]x'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ici $F[x(s)]x'(s)$ est le produit scalaire

$$F[x(s)]x'(s) = \sum_{i=1}^{m} F_i[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s)]x_i'(s).$$

Comme $x_i'(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_i$, on note souvent l'intégrale curviligne de deuxième espèce comme suit :

$$I = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{m} F_i\,\mathrm{d}x_i = \int_\Gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + F_m\mathrm{d}x_m.$$

En physique, on utilise pour $m = 3$ les notations suivantes :

$$I = \int_\Gamma \mathbf{F}(x, y, z)\,\mathbf{ds},$$

où $\mathbf{F}(x, y, z)$ et $\mathbf{ds}$ sont respectivement la fonction vectorielle et le vecteur tangent à la courbe Γ, de plus $|\mathbf{ds}| = \mathrm{d}s$.

Etablissons le lien qui existe entre l'intégrale curviligne de deuxième espèce et l'intégrale définie. Supposons que le paramètre t définit la même orientation de la courbe que le paramètre naturel s, c'est-à-dire que $t = t(s)$ et $a = t(0) < b = t(l)$, $0 \leqslant s \leqslant l$. Alors, la courbe $x = x(t)$ vérifiant l'égalité $\mathrm{d}x_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = x_i'(t)\,\mathrm{d}t$, on trouve

$$I = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{m} F_i x_i'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

Si l'orientation définie par le paramètre t est l'inverse par rapport à celle donnée par le paramètre naturel s, alors $a = t(l) < b = t(0)$ et

$$I = -\int_a^b \left[\sum_{i=1}^m F_i x_i'(t)\right] dt.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_-} F[x(s)]x'(s)\, ds = -\int_{\Gamma_+} F[x(s)]x'(s)\, ds,$$

c'est-à-dire que l'intégrale curviligne de deuxième espèce change de signe avec l'inversion d'orientation. Si Γ est une courbe fermée, l'intégrale $\int_\Gamma \sum_{i=1}^m F_i dx_i$ se note $\oint_\Gamma \sum_{i=1}^m F_i dx_i$ et s'appelle *circulation du vecteur F* le long de la courbe Γ.

Indiquons quelques applications physiques des notions introduites.

1. Soit une courbe matérielle Γ de densité linéique (densité par unité de longueur de courbe) ρ. Proposons-nous de calculer la masse M de la courbe Γ.

Divisons la courbe Γ en n morceaux et soit s_i la longueur de la portion de courbe de l'origine au point de numéro i. La masse M de la courbe est approximativement égale à $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(s_i)\Delta s_i$, où $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$. A la limite, en faisant tendre $\max_i \Delta s_i$ vers zéro, on obtient

$$M = \int_0^l \rho(s)\, ds.$$

2. Supposons qu'un solide se déplace suivant une courbe Γ sous l'action d'une force $\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k}$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ étant les vecteurs unités des axes de coordonnées. Calculer le travail de la force $\mathbf{F}$.

On sait du cours de physique que le travail d'une force $\mathbf{F}$ se mesure par le produit $|\mathbf{F}|l$ si celle-ci effectue un déplacement de longueur l dans la direction du vecteur force. Le travail est nul si le déplacement se fait dans la direction perpendiculaire au vecteur force. Ainsi donc, en déplaçant le solide dans la direction du vecteur $\mathbf{l}$ d'une distance $|\mathbf{l}|$, la force $\mathbf{F}$ effectue le travail $\mathbf{Fl}$. En effet, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, où $\mathbf{F}_1$ est la projetée de la force sur la direction $\mathbf{l}$ et $\mathbf{F}_2$, la projetée sur la direction perpendiculaire à $\mathbf{l}$. Le travail de la force $\mathbf{F}_1$ est $\mathbf{F}_1\mathbf{l} = \mathbf{Fl}$ et celui de $\mathbf{F}_2$ est nul.

Le travail de la force $\mathbf{F}$ lors du déplacement du solide le long de la courbe Γ est approximativement égal à $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}\, \Delta\mathbf{r}_i$, où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est le

rayon vecteur, $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$. En faisant tendre $\Delta \mathbf{r}_i$ vers zéro, on trouve à la limite

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_\Gamma F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Le cas de *forces potentielles* présente un intérêt particulier. C'est le cas où le vecteur **F** se laisse représenter sous la forme de gradient d'une fonction : $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. On a

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_0^l \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right] ds =$$

$$= \int_0^l \frac{df[x(s), y(s), z(s)]}{ds}\,ds =$$

$$= f[x(l), y(l), z(l)] - f[x(0), y(0), z(0)].$$

Ainsi donc, pour les forces potentielles, l'intégrale $\int_\Gamma \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ se définit sans ambiguïté par la donnée des bornes d'intégration et ne dépend pas de la forme de la courbe.

En physique, donner la fonction vectorielle $\mathbf{F}(x, y, z)$ c'est *donner le champ de vecteurs* correspondant. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} f(x, y, z)$, le champ de vecteur est dit *potentiel* et la fonction $f(x, y, z)$, potentiel du champ de vecteurs **F**.

Exemple. Soit à calculer la masse M de l'arc de la courbe $y^2 - 4x^2 = 3z^2$, $y^2 = x$, $z > 0$ entre les points (0, 0, 0) et (1/4, 1/2, 0) si la densité linéique $\rho = z$.

Paramétrons la courbe par la variable y. On a alors $x = y^2$, $z = y\sqrt{(1 - 4y^2)/3}$ (nous avons retenu le signe « + » du radical afin de satisfaire à la condition $z > 0$). Donc

$$M = \int_0^{1/2} z(y)\sqrt{1 + (x_y')^2 + (z_y')^2}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^{1/2} y(1 - 2y^2)\,dy = \frac{1}{16}.$$

Exercices. **1.** Calculer la masse de l'arc de la courbe $x = at$, $y = at^2/2$, $z = at^3/3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, dont la densité linéique varie suivant la loi $\rho = \sqrt{2y/a}$.

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C x^2\,ds$, où C est le cercle $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

Indication. Se servir de coordonnées sphériques.

3. Calculer l'intégrale curviligne de deuxième espèce $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, où C est une spire de la ligne hélicoïdale $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, parcourue dans le sens de décroissement du paramètre t.

§ 3. Surface différentiable

Convenons d'appeler *surface dans l'espace tridimensionnel de points* (x, y, z) l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant l'équation $F(x, y, z) = 0$. Supposant cette égalité résoluble par rapport à la variable z, nous obtenons l'équation de la surface $z = f(x, y)$.

De façon analogue, en résolvant l'équation $F(x, y, z) = 0$ par rapport à y ou x, on obtient l'équation de la surface sous la forme $y = f(z, x)$ ou $x = f(y, z)$. Cherchons à généraliser la notation de l'équation de la surface. A cet effet, supposons que la surface S est donnée par les égalités suivantes : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, où u, v sont des paramètres. Nous supposons ensuite que les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ admettent dans un certain domaine de variation des variables u, v des dérivées partielles du premier ordre continues et que l'un au moins des jacobiens $D(x, y)/D(u, v)$, $D(y, z)/D(u, v)$, $D(z, x)/D(u, v)$ est distinct de zéro en tout point (u, v). Montrons qu'une telle définition de la surface est effectivement une généralisation des définitions citées plus haut. La non-nullité de l'un au moins des jacobiens $D(x, y)/D(u, v)$, $D(y, z)/D(u, v)$, $D(z, x)/D(u, v)$ implique l'existence d'une relation fonctionnelle entre les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, à savoir l'une des relations de la forme $z = f_1(x, y)$, $x = f_2(y, z)$, $y = f_3(z, x)$, et les fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(y, z)$, $f_3(z, x)$ admettent des dérivées partielles du premier ordre continues. Dans le cas général, ces égalités s'écrivent sous la forme $F(x, y, z) = 0$, où la fonction $F(x, y, z)$ admet des dérivées partielles du premier ordre continues. Avant de donner une définition plus rigoureuse de la surface, définissons la notion d'ensemble connexe.

Définition. Un ensemble A des points $x = (x_1, \ldots, x_m)$ est dit *connexe* si tous points de A peuvent être reliés par une courbe différentiable par morceaux dont les points appartiennent à A.

Définition. Soit A un ensemble connexe ouvert de points (u, v) de frontière γ qui est une courbe différentiable par morceaux. L'ensemble des points (x, y, z) donnés par les égalités $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, où $(u, v) \in A$ s'appelle *aire différentiable élémentaire* si les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues sur l'ensemble A jusqu'à la frontière γ et si l'un au moins des

jacobiens $D(x, y)/D(u, v)$, $D(y, z)/D(u, v)$, $D(z, x)/D(u, v)$ est distinct de zéro pour toutes valeurs de u et v. L'ensemble des points $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ s'appelle ***surface différentiable par morceaux*** si cet ensemble est connexe et divisible en un nombre fini d'aires différentiables élémentaires. Nous admettrons qu'à des points (u, v) différents correspondent les points différents de la surface.

Remarque. Quelques-unes des dérivées partielles de fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ peuvent ne pas exister au sens usuel à la frontière γ de l'ensemble A. Pour cette raison, dans cette définition et partout dans la suite, par dérivée partielle au point de la frontière (u_0, v_0) de l'ensemble A nous allons comprendre la limite de la dérivée partielle correspondante lorsque le point $(u, v) \in A$ tend vers le point (u_0, v_0). Si au point frontière la dérivée partielle existe au sens usuel, les deux définitions de la dérivée partielle en ce point frontière conduisent à la même valeur.

Considérons la frontière γ de l'ensemble A sur lequel sont définies des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ pour une aire différentiable élémentaire. Comme la frontière γ est une courbe différentiable par morceaux, on a sur γ $u = u(s)$, $v = v(s)$, où s est le paramètre naturel et les fonctions $u(s)$, $v(s)$ admettent des dérivées premières continues par morceaux. La frontière de surface définie par les équations $x = x[u(s), v(s)]$, $y = y[u(s), v(s)]$, $z = z[u(s), v(s)]$ est donc une courbe différentiable par morceaux et la frontière d'une surface différentiable par morceaux est une courbe différentiable par morceaux.

Soient $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ des courbes différentiables tracées sur une surface. Montrons que les tangentes aux courbes passant par un point fixe de la surface sont contenues toutes dans un même plan qui s'appelle ***plan tangent*** à la surface au point donné. En effet, si la surface est donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, on a pour toute courbe passant par un point fixe (x_0, y_0, z_0) de la surface l'égalité $F[x(t), y(t), z(t)] = 0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée nous obtenons

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t_0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z(t_0)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité est le produit scalaire du vecteur grad $F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ et du vecteur de la tangente $\mathbf{l} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$, et l'égalité peut s'écrire sous la forme grad $F\,\mathbf{l} = 0$.

Ainsi, les tangentes aux courbes passant par un point fixe d'une surface

sont orthogonales à un même vecteur grad F et sont donc contenues dans un même plan. Le vecteur orthogonal à tous vecteurs situés dans le plan tangent s'appelle *normale à la surface*. Par conséquent, le vecteur grad F est une normale à la surface $F(x, y, z) = 0$.

Si l'équation de la surface est notée sous la forme $z = f(x, y)$, alors $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ et la normale à la surface est dirigée suivant le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$. Proposons-nous de déterminer la normale à la surface dans le cas où l'équation de cette dernière est donnée sous la forme $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Eliminant entre ces égalités les paramètres u et v, on trouve l'équation de la surface sous la forme $F(x, y, z) = 0$.

Exprimons le vecteur grad F à l'aide des dérivées partielles des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Comme $F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = 0$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Supposons que dans un point donné on a $D(x, y)/D(u, v) \neq 0$. Les égalités ci-dessus entraînent

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{D(z, x)/D(u, v)}{D(x, y)/D(u, v)}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{D(y, z)/D(u, v)}{D(x, y)/D(u, v)}.$$

Le vecteur grad F est donc proportionnel au vecteur

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}.$$

On arrive au résultat analogue dans le cas aussi où $D(y, z)/D(u, v) \neq 0$ ou $D(z, x)/D(u, v) \neq 0$. On en déduit que la normale à la surface est dirigée suivant le vecteur $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}$. Le vecteur de la normale de longueur unité (vecteur normal unitaire) est

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}}{\sqrt{\left[\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}}.$$

La possibilité de choisir le signe de $\mathbf{n}$ donne lieu à la notion de surface orientable.

Définition. Une surface est dite *orientable* si en chacun de ses points on peut choisir le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}(x, y, z)$ de façon que la fonction vectorielle $\mathbf{n}(x, y, z)$ soit continue sur la surface.

Si l'on convient du choix du signe de $\mathbf{n}(x, y, z)$ dans l'expression qu'on vient d'obtenir, chaque aire différentiable élémentaire de la surface devient une surface orientable.

Généralisons la notion de surface orientable pour les surfaces différentiables par morceaux. Soit Γ une courbe fermée différentiable par morceaux appartenant à une surface et y entourant un point (x, y, z). En rétrécissant la courbe Γ autour du point (x, y, z), on peut choisir pour sens de parcours positif de Γ celui de rotation du manche d'un tire-bouchon à hélice droite enfoncé dans la direction du vecteur $\mathbf{n}(x, y, z)$. Etant donné que pour une surface orientable le vecteur $\mathbf{n}(x, y, z)$ est une fonction continue, le choix du sens de parcours positif du contour en un point de surface définit sans ambiguïté le sens positif de parcours d'un contour en tout point de la surface, y compris sur la frontière de la surface. Convenons qu'une surface différentiable par morceaux est orientable si l'orientation des aires différentiables élémentaires est donnée de façon que les portions de frontières communes à deux aires voisines soient parcourues en sens inverses. Avec une telle convention, le choix du signe de $\mathbf{n}(x, y, z)$ en un point quelconque de la surface définit sans ambiguïté le sens de la normale en tout point de la surface considérée (fig. 18).

Servons-nous des notions que nous venons d'introduire pour mettre en évidence quelques caractéristiques des fonctions de trois variables $u = f(x, y, z)$. L'ensemble des points tels que $f(x, y, z) = C$, où C est une constante, s'appelle *surface de niveau* de la fonction $u = f(x, y, z)$. La normale à une surface de niveau est dirigée suivant le vecteur $\operatorname{grad} f(x, y, z) =$ $= \operatorname{grad} u$, puisque dans ce cas $f(x, y, z) - C = 0$.

Cherchons en conclusion l'équation reliant les points du plan (x, y, z) passant par le point (x_0, y_0, z_0) sachant que la normale à ce plan est parallèle au vecteur (A, B, C). Soient $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ deux points du plan. Alors le vecteur $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ est situé dans le plan et est orthogonal au vecteur (A, B, C), c'est-à-dire que $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. En particulier, l'équation du plan tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface de niveau de la fonction

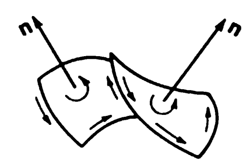


Fig. 18

$u = f(x, y, z)$ s'écrit

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) \doteq 0.$$

§ 4. Aire d'une surface

Supposons que les égalités $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ définissant une surface S sont équivalentes à l'égalité $z = f(x, y)$, où $(x, y) \in B$.

L'ensemble B sera supposé mesurable et soit R une subdivision de l'ensemble B en parties B_j mesurables de diamètre inférieur à Δ, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n - 1$. Considérons un cylindre de base B_j et de génératrice parallèle à l'axe Oz. Le cylindre découpe dans le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ en un point $(x, y) \in B_j$ une figure plane B_j' d'aire $mB_j' = \dfrac{mB_j}{|\cos(\mathbf{n}, z)|}$, où $(\mathbf{n}, z)$ est l'angle que fait le vecteur de la normale $\mathbf{n}$ avec l'axe Oz (l'aire de la projetée d'une figure plane est égale à l'aire de la figure multipliée par le cosinus de l'angle que font entre eux le plan de la figure et celui de sa projetée). La quantité mB_j' est intuitivement conçue comme l'aire de la surface $z = f(x, y)$ correspondant à l'ensemble des points $(x, y) \in B_j$. On appelle donc *aire* de la surface S la limite pour $\Delta \to 0$ de la somme

$$S_R = \sum_{j=0}^{n-1} mB_j' = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{mB_j}{|\cos(\mathbf{n}, z)|}$$

si cette limite est indépendante du mode de subdivision R de la surface et du choix des points $(x, y) \in B_j$.

Ainsi donc, l'aire d'une surface $z = f(x, y)$ est égale à

$$\sigma = \int_B \frac{dx\,dy}{|\cos(\mathbf{n}, z)|}.$$

Si la surface est donnée par l'équation $y = f(z, x)$ ou $x = f(y, z)$, on a respectivement $\sigma = \displaystyle\int_{B_y} \frac{dz\,dx}{|\cos(\mathbf{n}, y)|}$ ou $\sigma = \displaystyle\int_{B_x} \frac{dy\,dz}{|\cos(\mathbf{n}, x)|}$. Montrons, en nous servant de l'équation paramétrique de la surface $S: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, où $(u, v) \in A$, que toutes les trois expressions de σ sont équivalentes. L'ensemble A sera considéré comme mesurable. Nous aurons besoin de la formule de changement de variables dans les intégrales

multiples. Comme

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, z)\mathbf{k} =$$

$$= \pm \frac{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}\right]}{\sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}},$$

on obtient dans tous les trois cas l'expression suivante de l'aire σ de la surface :

$$\sigma = \int_A \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}\, du\, dv.$$

On admettra que cette expression donne dans le cas général l'aire de toute surface S différentiable par morceaux.

Exemple. Soit à calculer l'aire de la portion de la surface cylindrique $x^2 + y^2 = x$ découpée par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Les calculs sont moins encombrants en coordonnées sphériques : $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$, où $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. L'équation de la surface cylindrique concernée est donnée par $r \sin\vartheta = \cos\varphi$. Comme pour la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ le rayon $r = 1$, il s'agit de trouver l'aire de la portion de la surface cylindrique pour laquelle $0 \leqslant r \leqslant 1$. Eliminons la variable r. L'équation de la surface cylindrique s'écrit alors $x = \cos^2\varphi$, $y = \cos\varphi \sin\varphi$, $z = \operatorname{cotg}\vartheta \cos\varphi$. Soit A l'ensemble des points de la surface cylindrique pour lesquels $0 \leqslant r \leqslant 1$, c'est-à-dire que $0 \leqslant \cos\varphi/\sin\vartheta \leqslant 1$. L'aire σ demandée est alors égale à

$$\sigma = \iint_A \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(\vartheta, \varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(\vartheta, \varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(\vartheta, \varphi)}\right]^2}\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \iint_A \frac{|\cos\varphi|}{\sin^2\vartheta}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Passons de l'intégrale double à une intégrale itérée. Comme $0 \leqslant \cos\varphi/\sin\vartheta \leqslant 1$, on a pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ soit $\pi/2 - \vartheta \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, soit $3\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2 + \vartheta$; si $\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, on a $-\pi/2 + \vartheta \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ ou $3\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 5\pi/2 - \vartheta$. Donc

$$\sigma = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[\int_{\pi/2-\vartheta}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi + \int_{3\pi/2}^{3\pi/2+\vartheta} \cos\varphi\, d\varphi\right] +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \left[\int_{-\pi/2+\vartheta}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2-\vartheta} \cos \varphi \, d\varphi \right] = 4.$$

Exercice. Calculer l'aire d'une portion sphérique délimitée par deux parallèles et deux méridiens.

§ 5. Intégrale de surface de première espèce

Supposons qu'une fonction $F(x, y, z)$ est définie pour au moins les points (x, y, z) d'une surface $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in A$, où A est un ensemble mesurable. Divisons l'ensemble A en parties mesurables A_j de diamètre inférieur à Δ, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Associons à l'ensemble A_j l'aire $\Delta\sigma_j$ de la surface considérée. Si existe la limite

$$I = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} F[x(\bar{u}_j, \bar{v}_j), y(\bar{u}_j, \bar{v}_j), z(\bar{u}_j, \bar{v}_j)]\Delta\sigma_j, \quad (\bar{u}_j, \bar{v}_j) \in A_j,$$

indépendante du mode de partition de l'ensemble et du choix des points $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$, cette limite s'appelle *intégrale superficielle de première espèce de la fonction $F(x, y, z)$ étendue à la surface S* $\left(\text{notation : } \int_S F(x, y, z) d\sigma\right)$.

L'intégrale I se ramène à une intégrale double si la surface est d'aire finie, les dérivées partielles du premier ordre des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ bornées, et la fonction $F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, intégrable sur l'ensemble A. En effet, substituons à la quantité $\Delta\sigma_j$ l'expression

$$\Delta\sigma_j = \int_{A_j} J(u, v) \, du \, dv,$$

où $J(u, v) = \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}$.
Montrons que $I = I^*$, où

$$I^* = \int_A F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] J(u, v) \, du \, dv.$$

Nous avons

$$\left| I^* - \sum_{j=0}^{n-1} F[x(\bar{u}_j, \bar{v}_j), y(\bar{u}_j, \bar{v}_j), z(\bar{u}_j, \bar{v}_j)]\Delta\sigma_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{A_j} | F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] -$$

$$- F[x(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j), y(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j), z(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)]|J(u, v)\,du\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(u, v)\in A} J(u, v) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j mA_j,$$

où ω_j est l'oscillation de la fonction $F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ sur l'ensemble A_j. La fonction $F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ étant intégrable sur l'ensemble A, le dernier terme de l'inégalité tend vers zéro lorsque $\Delta \to 0$, donc on a effectivement $I = I^*$.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale $I = \iint_S (x + y + z)\,d\sigma$, où S est une demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$.

Utilisons les coordonnées sphériques : $x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ $(r = 1)$. Alors

$$d\sigma = \sqrt{[D(z, x)/D(\vartheta, \varphi)]^2 + [D(y, z)/D(\vartheta, \varphi)]^2 + [D(x, y)/D(\vartheta, \varphi)]^2} \times$$
$$\times\, d\vartheta\, d\varphi = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Par conséquent,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} (\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta)\, d\varphi = \pi.$$

§ 6. Intégrale de surface de deuxième espèce

Considérons une surface différentiable par morceaux orientée. Alors pour chaque aire différentiable élémentaire de cette surface est défini le vecteur normal unitaire

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\left[\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}\mathbf{i} + \dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}\mathbf{j} + \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\mathbf{k}\right]}{\sqrt{\left[\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}}.$$

Le choix du signe dépend du choix de l'orientation de la surface. Soit une fonction vectorielle $\mathbf{F}(x, y, z)$ qui est définie et continue au moins pour les points de la surface S. On appelle *intégrale de la fonction vectorielle* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *sur S* (*intégrale de surface de deuxième espèce*) l'intégrale de surface de première espèce du produit scalaire $\mathbf{Fn}$. Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

l'intégrale de surface de deuxième espèce est

$$I = \int_S \mathbf{Fn}\, d\sigma = \int_S [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma.$$

On utilise souvent une autre notation pour désigner l'intégrale de surface de deuxième espèce, à savoir $I = \int_S \mathbf{F} d\boldsymbol{\sigma}$, où $d\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur d'un élément de surface dirigé suivant la normale à la surface, et tel que $|d\boldsymbol{\sigma}| = d\sigma$; la notation concise correspondante en est $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\, d\sigma$.

En physique, l'intégrale de surface de deuxième espèce s'appelle *flux du vecteur* **F** *à travers la surface orientée S*.

Passons dans l'intégrale I à l'intégration suivant les paramètres (u, v). Nous avons

$$I = \pm \int_A \left(P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right) du\, dv,$$

où

$$P = P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)],$$
$$Q = Q[x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \quad R = R[x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

Le signe dépend du choix de l'orientation de la surface S. Supposons que l'équation de la surface S se laisse écrire simultanément sous la forme

$$z = f_1(x, y),\ (x, y) \in A_z,\ y = f_2(z, x),\ (z, x) \in A_y,$$
$$x = f_3(y, z),\ (y, z) \in A_x.$$

Proposons-nous de réduire les expressions des intégrales de surface de première espèce à des intégrales doubles suivant les variables (x, y), (z, x), (y, z) respectivement. Dans le premier cas $u = x$, $v = y$, dans le second, $u = z$, $v = x$ et dans le troisième, $u = y$, $v = z$. Donc

$$\int_S F(x, y, z)\, d\sigma =$$

$$= \int_{A_z} F[x, y, f_1(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} dx\, dy =$$

$$= \int_{A_y} F[x, f_2(z, x), z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2} dz\, dx =$$

$$= \int_{A_x} F[f_3(y, z), y, z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)^2} dy\, dz.$$

Ici

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}=\frac{1}{|\cos(\mathbf{n},z)|},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{|\cos(\mathbf{n},y)|},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{|\cos(\mathbf{n},x)|}.$$

Toutes les expressions des intégrales de première espèce s'obtiennent formellement en remplaçant l'élément de surface $d\sigma$ par les expressions

$$d\sigma=\frac{dx\,dy}{|\cos(\mathbf{n},z)|}=\frac{dz\,dx}{|\cos(\mathbf{n},y)|}=\frac{dy\,dz}{|\cos(\mathbf{n},x)|}.$$

Donc pour les intégrales de surface de deuxième espèce on a

$$\int_S \mathbf{Fn}\,d\sigma=\int_S[P(x,y,z)\cos(\mathbf{n},x)+Q(x,y,z)\cos(\mathbf{n},y)+$$

$$+R(x,y,z)\cos(\mathbf{n},z)]d\sigma=$$

$$=\int_{A_x}P[f_3(y,z),y,z]\operatorname{sign}[\cos(\mathbf{n},x)]dy\,dz+$$

$$+\int_{A_y}Q[x,f_2(z,x),z]\operatorname{sign}[\cos(\mathbf{n},y)]dz\,dx+$$

$$+\int_{A_z}R[x,y,f_1(x,y)]\operatorname{sign}[\cos(\mathbf{n},z)]dx\,dy,$$

où

$$\operatorname{sign}x=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}+1 \text{ pour } x>0,\\ \ \ 0 \text{ pour } x=0,\\ -1 \text{ pour } x<0.\end{cases}$$

Introduisons la notion de surface plane orientable A_x^*, A_y^*, A_z^*, très utile pour les applications. On admet que l'orientation de la surface A_x est positive si le sens de parcours de la frontière de la surface S projetée sur le plan (y, z) est tel que le domaine A_x reste toujours à gauche (parcours dans le sens antihoraire). Dans le cas contraire l'orientation de la surface plane est négative. Mêmes raisonnements pour les surfaces planes orientables A_y^*, A_z^*. Définissons l'intégrale suivant la surface orientable A_x^* :

$$\int_{A_x^*}f(y,z)\,dy\,dz=\pm\int_{A_x}f(y,z)\,dy\,dz.$$

Le signe « plus » correspond à l'orientation positive de la surface, le signe « moins », à l'orientation négative. Conformément à cette convention on a donc

$$\int_S \mathbf{Fn}\, d\sigma = \int_{A_x^*} P(x, y, z)\, dy\, dz + \int_{A_y^*} Q(x, y, z)\, dz\, dx + \int_{A_z^*} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

§ 7. Formule de Gauss-Ostrogradsky

En physique, on se sert souvent de la *formule* dite *de Gauss-Ostrogradsky* établissant le lien qui existe entre l'intégrale suivant un volume V et l'intégrale suivant la surface S délimitant ce volume :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV = \int_S \mathbf{Fn}\, d\sigma.$$

Ici $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à la surface S dirigé vers l'extérieur de V, et

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

La quantité div $\mathbf{F}$ s'appelle *divergence de la fonction vectorielle* $\mathbf{F}$.

Déduisons tout d'abord la formule de Gauss-Ostrogradsky dans le cas où $P = Q = 0$ pour un domaine cylindrique de génératrice dirigée suivant l'axe Oz :

$$\varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y),\ (x, y) \in A_z,$$

où A_z est la projetée des bases du domaine cylindrique sur le plan (x, y) (fig. 19). En remplaçant l'intégrale triple par une intégrale itérée, on trouve

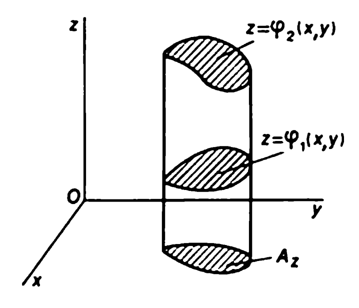


Fig. 19

$$\int\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{A_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{A_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\{R[x, y, \varphi_2(x, y)] - R[x, y, \varphi_1(x, y)]\} =$$

$$= \int\limits_S R(x, y, z)\cos(\mathbf{n}, z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

On a utilisé essentiellement le fait que $\cos(\mathbf{n}, z) = 0$ sur la surface latérale du cylindre, $\cos(\mathbf{n}, z) > 0$ sur la surface $z = \varphi_2(x, y)$ et $\cos(\mathbf{n}, z) < 0$ sur la surface $z = \varphi_1(x, y)$. En outre, $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|\cos(\mathbf{n}, z)|}$.

Nous avons prouvé la formule de Gauss-Ostrogradsky dans le cas de $P = Q = 0$ pour des volumes V de forme spéciale. Dans le cas général, on peut représenter le volume considéré comme une somme de volumes de forme spéciale : $V = \sum\limits_j V_j$. En outre,

$$\int\limits_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \sum_j \int\limits_{S_j} R\cos(\mathbf{n}, z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Les portions des intégrales de surface correspondantes aux frontières entre deux volumes adjacents V_j s'éliminent, car pour de telles surfaces $\cos(\mathbf{n}, z)$ est de signe contraire. On a donc

$$\int\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}V = \int\limits_S R\cos(\mathbf{n}, z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

De façon analogue on trouve

$$\int\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}V = \int\limits_S P\cos(\mathbf{n}, x)\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\int\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}V = \int\limits_S Q\cos(\mathbf{n}, y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

En additionnant les relations obtenues, on retrouve la formule de Gauss-Ostrogradsky.

Considérons le cas particulier de la formule de Gauss-Ostrogradsky lorsque la fonction vectorielle $\mathbf{F}(x, y, z)$ ne dépend pas de z, $R = 0$, et le volume V est un cylindre de hauteur h dont la base inférieure A est située dans le plan (x, y) et y est délimitée par le contour $\Gamma : x = x(s), y = y(s)$,

$0 \leqslant s \leqslant l$. Convenons que l'orientation du contour Γ est choisie telle que lorsque Γ est parcouru dans le sens positif, son intérieur reste toujours à gauche. Nous avons

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Les intégrales de surface prises suivant les bases du cylindre sont nulles, puisque les fonctions sous le signe de l'intégrale contiennent les facteurs $\cos(\mathbf{n}, x)$ et $\cos(\mathbf{n}, y)$ nuls. Pour calculer l'intégrale suivant la surface latérale du cylindre, nous retenons comme paramètres les variables z et s, $0 \leqslant z \leqslant h$, $0 \leqslant s \leqslant l$. On a alors

$$\int_S [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] \, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^l [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] \, \mathrm{d}s,$$

puisque dans ce cas $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}z \, \mathrm{d}s$ (à vérifier à titre d'exercice). Remarquant que le vecteur $\mathbf{l}$ de la tangente à la courbe Γ s'obtient du vecteur $\mathbf{n}$ moyennant une rotation de l'angle $\pi/2$ dans le sens antihoraire (fig. 20), on trouve

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\mathbf{l}, y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = -\cos(\mathbf{l}, x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

et donc la formule de Gauss-Ostrogradsky nous conduit à l'égalité

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^l \left[P(x, y) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - Q(x, y) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}s =$$

$$= \int_\Gamma P \, \mathrm{d}y - Q \, \mathrm{d}x.$$

En changeant dans cette relation Q en $-Q$, on obtient la formule dite *for-*

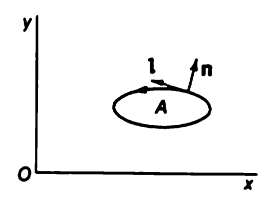


Fig. 20

mule de Green :

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Gamma P\, \mathrm{d}y + Q\, \mathrm{d}x.$$

Rappelons que Γ est le contour délimitant le domaine A, et lorsque ce contour est parcouru dans le sens positif, le domaine A reste à gauche, ce qui correspond à l'orientation positive d'un domaine plan. Nous admettons que les vecteurs **i**, **j**, **k** constituent un trièdre droit, c'est-à-dire que le tire-bouchon à hélice droite tourné dans le sens amenant le vecteur **i** sur le vecteur **j** se déplace dans la direction du vecteur **k**. Dans ce cas le sens de parcours positif du contour d'une surface plane située dans le plan (x, y) correspond à la direction du vecteur **k**. Même raisonnement concernant les plans (y, z), (z, x).

Exemple. Soit à calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma x\, \mathrm{d}y + y\, \mathrm{d}x$, où Γ est une ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

La formule de Green nous donne

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0.$$

§ 8. Formule de Stokes

Aussi souvent que la formule de Gauss-Ostrogradsky, on utilise en physique la *formule de Stokes* :

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Gamma \mathbf{F}(x, y, z)\, \mathrm{d}\mathbf{s},$$

dans laquelle

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

Γ est le contour délimitant la surface S et orienté conformément à l'orientation de la surface S. La formule de Stokes dit : le flux du vecteur rot **F** (rot pour le rotationnel) à travers la surface orientée S est égal à la circulation du vecteur **F** suivant le contour Γ délimitant la surface S et dont l'orientation est conforme à celle de la surface S.

Prouvons la formule de Stokes pour une aire différentiable élémentaire décrite par l'une des équations suivantes :

$$x = f_1(y, z),\ (y, z) \in A_x\ ; \quad y = f_2(z, x),\ (z, x) \in A_y\ ;$$

$$z = f_3(x, y), \quad (x, y) \in A_z .$$

Nous avons

$$\int\limits_S \operatorname{rot} \mathbf{F}\, d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos (\mathbf{n}, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos (\mathbf{n}, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos (\mathbf{n}, z) \right\} d\sigma.$$

Considérons dans cette intégrale les termes en $P(x, y, z)$. Les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\frac{\partial f_3}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ étant proportionnels sur la surface $z = f_3(x, y)$, on a $\cos (\mathbf{n}, y) = -\cos (\mathbf{n}, z) \frac{\partial f_3}{\partial y}$. Donc sur la surface $z = f_3(x, y)$ on a

$$\frac{\partial P}{\partial z} \cos (\mathbf{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos (\mathbf{n}, z) =$$

$$= -\cos (\mathbf{n}, z) \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial y} \right] = - \cos (\mathbf{n}, z) \frac{\partial P[x, y, f_3(x, y)]}{\partial y}.$$

Supposons pour fixer les idées que la projetée d'une surface orientée S sur le plan (x, y) est une surface A_z plane orientée positivement (le cas de l'orientation négative se traite de façon analogue). On a

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cos (\mathbf{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos (\mathbf{n}, z) \right] d\sigma =$$

$$= - \int\limits_{A_z} \frac{\partial P[x, y, f_3(x, y)]}{\partial y}\, dx\, dy.$$

D'après la formule de Green, la dernière intégrale est égale à $\int\limits_{\Gamma_z} P[x, y, f_3(x, y)] dx$, où Γ_z est le projeté du contour Γ sur le plan (x, y). Le contour Γ est défini par les équations de la forme $x = x(s), y = y(s), z = z(s), 0 \leqslant s \leqslant l$, s est le paramètre naturel. On a donc

$$\int\limits_{\Gamma_z} P[x, y, f_3(x, y)]\, dx =$$

$$= \int_0^l P\{x(s), y(s), f_3[x(s), y(s)]\} \frac{dx}{ds}\, ds = \int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx,$$

d'où

$$\int_S \left[\frac{\partial P}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, z)\right]\mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma P(x, y, z)\,\mathrm{d}x.$$

D'une façon analogue, on obtient les égalités

$$\int_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\mathbf{n}, x)\right]\mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_S \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(\mathbf{n}, y)\right]\mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma R(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

En additionnant ces égalités, on trouve

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \mathbf{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

C'est précisément la formule de Stokes.

Les calculs précédents n'ont pas de sens si la projetée d'une surface sur le plan (x, y) n'est pas une surface plane, mais une courbe, c'est-à-dire lorsque l'on a sur la surface $\cos(\mathbf{n}, z) = 0$. On peut dans ce cas prendre pour équation de la surface non pas $z = f_3(x, y)$, mais $y = f_2(z, x)$, la fonction $f_2(z, x)$ ne dépendant pas de z. On a en définitive

$$\int_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\mathbf{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\mathbf{n}, z)\right]\mathrm{d}\sigma = \int_{A_y} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

où A_y est la projetée de la surface S sur le plan (z, x). A l'aide de la formule de Green on peut transformer cette intégrale en intégrale $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x$, en parfaite analogie avec le cas précédent.

Prouvons la formule de Stokes pour une surface différentiable par morceaux arbitraire S. A cet effet, partageons S en surfaces élémentaires S_i vérifiant les conditions posées plus haut. Soit Γ_i le contour délimitant S_i et orienté comme le veut l'orientation de S_i. On a alors

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \int_{S_i} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}\,\mathrm{d}s.$$

Les contours Γ_i comportent des parties du contour Γ et les frontières communes aux surfaces adjacentes à S_i. Les sens de parcours des portions de frontières communes à deux surfaces voisines étant contraires, les intégrales curvilignes prises suivant les frontières communes se compensent

mutuellement, c'est-à-dire que

$$\sum_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

On a prouvé la formule de Stokes pour ce cas aussi. Indiquons en conclusion une forme d'inscription commode du vecteur rot **F** au moyen du déterminant :

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant suivant les éléments de la première ligne, en plaçant les symboles $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ à la première place et les polynômes P, Q, R à la seconde dans chaque terme de la somme. Par produit $\dfrac{\partial}{\partial y} P$ on entend $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et ainsi de suite.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \oint_{\Gamma} (y + z)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}z,$$

où Γ est une courbe fermée définie par les équations $x = \cos t$, $y = \cos 2t$, $z = \cos 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, parcourue dans le sens des t croissants. Posons $\mathbf{F} = (y + z, z + x, x + y)$. Alors $I = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$. D'après la formule de Stokes, $I = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$, où la surface S a le contour Γ pour frontière et est orientée en conformité avec l'orientation de Γ. Comme $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, on a $I = 0$.

Exercices. **1.** Calculer à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky l'intégrale de surface de deuxième espèce

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

où S est le côté extérieur de la frontière du cube $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

2. A l'aide de la formule de Stokes calculer l'intégrale

$$\int_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

prise suivant une hélice définie par $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{h}{2\pi}\varphi$, du point $(a, 0, 0)$ au point $(a, 0, h)$.

3. A l'aide de la formule de Green calculer l'intégrale curviligne

$$\oint_C e^x[(1 - \cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy],$$

où C est le contour, parcouru dans le sens positif, délimitant le domaine $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

§ 9. Eléments d'analyse vectorielle

Les expressions du gradient, de la divergence, du rotor acquièrent une forme particulièrement maniable si on les note à l'aide de l'opérateur vectoriel

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Par exemple, grad $f(x, y, z)$ se note sous la forme d'un « produit » du vecteur ∇ par un « scalaire » $f(x, y, z)$, dans lequel le vecteur ∇ occupera la première place et $f(x, y, z)$, la seconde. Par produits $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial y}f$, $\frac{\partial}{\partial z}f$ on entendra les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Ainsi donc, grad $f = \nabla f$.

De même, en vertu des conventions faites, on peut noter l'expression de div $\mathbf{F}(x, y, z)$ sous la forme du produit scalaire du vecteur ∇ par le vecteur $\mathbf{F}(x, y, z)$, où

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Donc, div $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\mathbf{F}(x, y, z)$.

Pour la notation concise du vecteur rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ nous aurons besoin du produit vectoriel $\mathbf{c}$ des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$: le vecteur $\mathbf{c}$ est orthogonal aux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\varphi$, où φ est l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ constituant le trièdre droit (notation : $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$).

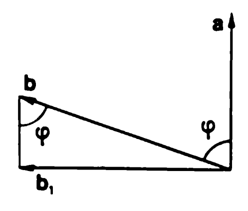


Fig. 21

Les propriétés suivantes découlent de la définition du produit vectoriel :

1° $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

2° $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

3° $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Prouvons la propriété 3° (les deux premières sont évidentes). Remarquons préalablement que la propriété 2° nous permet de supposer que $|\mathbf{a}| = 1$; en outre, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1$, où $\mathbf{b}_1$ est le projeté du vecteur $\mathbf{b}$ sur un plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{a}$ (fig. 21). On a donc

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{c}_1 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2.$$

Supposant que le vecteur $\mathbf{a}$ est perpendiculaire au plan du dessin et est dirigé vers l'observateur, on peut se servir de la figure 22, où $\mathbf{d}_1 \perp \mathbf{b}_1$, $\mathbf{d}_2 \perp \mathbf{c}_1$ et $|\mathbf{d}_1| = |\mathbf{b}_1|$, $|\mathbf{d}_2| = |\mathbf{c}_1|$. On voit sur le dessin que le vecteur $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1$ et $|\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2| = |\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1|$. Or, ceci signifje précisément que $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1)$, c'est-à-dire que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, ce qu'il fallait démontrer.

Les propriétés 3° et 1° impliquent

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

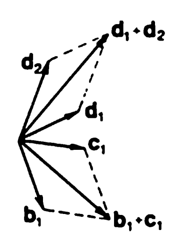


Fig. 22

et une propriété plus générale

$$\left(\sum_i \mathbf{a}_i\right) \times \left(\sum_j \mathbf{b}_j\right) = \sum_{i,j} \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_j .$$

Soient $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ici **i**, **j**, **k** sont des vecteurs unitaires des axes orthogonaux Ox, Oy, Oz. Comme $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, on a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Par conséquent, l'expression rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ peut être formellement notée comme suit à l'aide de l'opérateur vectoriel ∇ :

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z).$$

La notation de diverses expressions à l'aide de l'opérateur ∇ s'avère être très commode lorsqu'on cherche à écrire des expressions encombrantes sous une forme plus simple. Ce faisant, on peut se servir des expressions suivantes

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$$

faciles à vérifier.

En outre, vu que l'opérateur ∇ contient des dérivées premières, en appliquant les expressions où figure ∇ à un produit de deux facteurs, on obtient une somme de deux termes dans chacun desquels l'opérateur ∇ agit sur l'un des facteurs (il est commode de le noter ∇_1 ou ∇_2 suivant qu'il agit sur le premier ou le second facteur).

Exemples. **1.** div $[f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)] = \nabla[f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)] = = \nabla_1[f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)] + \nabla_2[f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)] = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot \text{grad} f(x, y, z) + f(x, y, z) \text{ div } \mathbf{F}(x, y, z)$.

En particulier, si $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}$ est un vecteur constant, on a

$$\text{div } [f(x, y, z)\mathbf{a}] = \mathbf{a} \text{ grad} f(x, y, z).$$

Cette relation aidant, on peut tirer de la formule de Gauss-Ostrogradsky une relation très commode pour les applications. En posant dans cette formule $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{a}$, on trouve

$$\int_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \int_V \operatorname{grad} f(x, y, z)\, \mathrm{d}V \cdot \mathbf{a}$$

et aussi

$$\int_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \operatorname{grad} f(x, y, z)\, \mathrm{d}V,$$

car le vecteur $\mathbf{a}$ est arbitraire.

2. $\operatorname{div} [\mathbf{F}_1(x, y, z) \times \mathbf{F}_2(x, y, z)] = \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \nabla_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) + \nabla_2 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla_1 \times \mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \operatorname{rot} \mathbf{F}_2$.

3. $\operatorname{rot} [\mathbf{F}_1(x, y, z) \times \mathbf{F}_2(x, y, z)] = \nabla \times [\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2] = \nabla_1 \times [\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2] + \nabla_2 \times [\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2] = \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \mathbf{F}_2) - \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla_1 \cdot \mathbf{F}_1) + \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla_2 \cdot \mathbf{F}_2) - \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla_2 \cdot \mathbf{F}_1) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla_1)\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla_1 \cdot \mathbf{F}_1) + \mathbf{F}_1(\nabla_2 \cdot \mathbf{F}_2) - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla_2)\mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \operatorname{div} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \operatorname{div} \mathbf{F}_2 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2$.

4. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{F}] = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}$.

Ici $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace.

INDEX TERMINOLOGIQUE

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse : Editions Mir,
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ALGÈBRE LINÉAIRE

par I. Proskouriakov

Rédigé par I. Proskouriakov, candidat ès sciences physiques et mathématiques, ce livre contient environ 2000 problèmes d'algèbre linéaire, de théorie des groupes, des anneaux, des corps commutatifs et des tenseurs. Tous les problèmes sont groupés en sections suivantes : déterminants, systèmes d'équations linéaires, matrices et formes quadratiques, espaces vectoriels et opérateurs linéaires. Des réponses exhaustives ou des indications concernant la voie à suivre sont données pour la plupart des problèmes.

Destiné aux étudiants se spécialisant dans les mathématiques et la physique.